

8. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Wir betrachten noch einmal das Setting von Aufgabe 1 vom Übungsblatt 6: Zufallszahlen x_1, x_2, \dots, x_n heissen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = \lambda e^{-\lambda x} dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = 0$ falls $x < 0$. In Teil (c) hatten wir gezeigt, dass der Maximum Likelihood Schätzer für das λ durch

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

gegeben ist, und in Teil (e) hatten wir den Erwartungswert berechnet,

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)] = \frac{n}{n-1} \lambda \quad (1)$$

a) Zeigen Sie jetzt, dass die Varianz des Maximum Likelihood Schätzers gegeben ist durch

$$\mathbb{V}[\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)] = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2 \quad (2)$$

Benutzen Sie dazu wieder die Formel aus Teil (1f) vom Übungsblatt 6. Insbesondere gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}[\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)] = 0$$

Je mehr Daten wir haben, desto genauer werden die Schätzungen.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate vom Übungsblatt 6, dass die Verteilung von $\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n)$ gegeben ist durch

$$\text{Prob}[\hat{\lambda}_{\text{ML}} \in [x, x + dx)] =: p_{\hat{\lambda}_{\text{ML}}}(x) dx$$

mit der Dichte

$$p_{\hat{\lambda}_{\text{ML}}}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{(n\lambda)^n}{x^{n+1}} e^{-\frac{n\lambda}{x}} \quad (3)$$

Diese Formel werden wir in der nächsten Aufgabe mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen.

..*bitte wenden*

Aufgabe 2: Wir wollen die Formeln (1), (2) und (3) aus Aufgabe 1 mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- a) Legen Sie die Variablen $N = 10000$ und $n = 10$ in R an. N ist die Anzahl der Zufallsexperimente, die wir durchführen werden, und $n = 10$ ist die Anzahl der exponentialverteilten Zufallszahlen, die wir pro Zufallsexperiment ziehen wollen. Weil wir das n so klein wählen (auf Üblatt 6 hatten wir $n = 1000$) ist es jetzt wesentlich, ob man etwa durch n oder durch $n - 1$ teilt.
- b) Legen Sie den Vektor `lambdaML` der Länge N an und initialisieren Sie ihn etwa mit Einträgen 0. Programmieren Sie dann einen Loop von 1 bis N , der bei jedem Durchlauf n mit Parameter $\lambda = 4$ exponentialverteilte Zufallszahlen erzeugt, daraus das $\hat{\lambda}_{ML}(x_1, \dots, x_n)$ berechnet und das Resultat dann in dem Vektor `lambdaML` speichert.
- c) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von `lambdaML` und vergleichen Sie die Werte mit den theoretischen Resultaten (1) und (2).
- d) Codieren Sie eine benutzerdefinierte Funktion `dlambdaML = function(x,n,lambda)`, die durch die rechte Seite von (3) gegeben ist (“d” steht dabei für “density” von $\hat{\lambda}_{ML}$). Erzeugen Sie dann ein Histogramm des Vektors `lambdaML`, wobei Sie den optionalen Parameter `prob = TRUE` setzen, und fügen Sie einen `plot` von `dlambdaML`, etwa in rot, Ihrem Histogramm zu. Der `function-plot` und das Histogramm sollten dann also in etwa übereinstimmen.