

6. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Zufallszahlen x_1, x_2, \dots heissen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = \lambda e^{-\lambda x} dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = 0$ falls $x < 0$.

- a) Es sei x eine mit Parameter $\lambda > 0$ exponential-verteilte Zufallszahl. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von x gilt: $E[x] = \frac{1}{\lambda}$.

Nehmen wir jetzt an, dass die Zufallszahlen x_1, x_2, \dots, x_n gegeben sind, und dass wir wissen, dass sie durch eine Exponentialverteilung mit Parameter λ erzeugt worden sind, wir kennen jedoch den konkreten Wert für λ nicht. Wir möchten das λ mit Hilfe der Maximum Likelihood Methode schätzen:

- b) Geben Sie die Likelihood Funktion $L = L(\lambda)$ an. Die Funktion hängt neben λ auch von den gegebenen Zufallszahlen x_1, \dots, x_n ab, was wir aber nicht im Argument explizit machen, da wir die Funktion durch Variation von λ maximieren möchten, bei festem x_1, \dots, x_n . Berechnen Sie ebenfalls den Logarithmus $\log L(\lambda)$ und vereinfachen Sie das Resultat soweit wie möglich. Da der Logarithmus eine streng monoton steigende Funktion ist, ist das Problem

$$L(\lambda) \stackrel{!}{\rightarrow} \max$$

äquivalent zu

$$\log L(\lambda) \stackrel{!}{\rightarrow} \max,$$

aber rechentechnisch und numerisch ist es einfacher, den Logarithmus der Likelihood Funktion $\log L(\lambda)$ zu maximieren.

- c) Zeigen Sie, dass der Maximum Likelihood Schätzer für λ gegeben ist durch

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}.$$

Bestimmen Sie dazu das Maximum von $\log L(\lambda)$.

- d) Wenn Sie überprüfen sollten, ob $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ erwartungstreu ist, welche mathematische Gleichung müssten Sie dann zeigen? Geben Sie explizit an, wie der Erwartungswert zu berechnen ist.

..bitte wenden

- e) Beweisen Sie jetzt: der Maximum Likelihood Schätzer ist nicht erwartungstreu, aber der modifizierte Schätzer

$$\hat{\lambda}_{\text{Etreu}}(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i}$$

ist erwartungstreu. Zum Beweis benötigen Sie die Resultate aus Teil (f) und (g).

- f) Zeigen Sie: Für jede Funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^\infty f(y) \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy$$

- g) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^\infty y^m e^{-y} dy = m!$.

Bemerkung: Die Aufgabenteile (f) und (g) sind definitiv nicht Klausur-relevant.

Aufgabe 2: Wir wollen die Resultate aus Aufgabe 1 mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen:

- a) Die Exponential-Verteilung gehört zu den in R eingebauten Verteilungen. Erzeugen Sie $n = 1000$ mit Parameter $\lambda = 4$ exponential-verteilte Zufallszahlen und speichern Sie sie in dem Vektor \mathbf{x} . Erstellen Sie einen Plot und ein Histogramm von \mathbf{x} . Die Syntax für die Exponential-Verteilung können Sie in dem file `W'keitsverteilungen-in-R.pdf` finden, es befindet sich auf der Vorlesungshomepage.
- b) Berechnen Sie die Werte der Schätzer $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ und $\hat{\lambda}_{\text{Etreu}}$. Diese Zahlen sollten also in der Nähe von 4 liegen.
- c) Legen Sie den Vektor

$$\lambda = (0.1, 0.2, 0.3, \dots, 9.8, 9.9, 10.0) =: (\lambda_1, \dots, \lambda_{100})$$

an. Berechnen Sie dann numerisch den Wert der log-Likelihood-Funktion für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_{100}$ und speichern Sie diese Zahlen in dem Vektor

$$\mathbf{logL} = (\mathbf{logL}[1], \mathbf{logL}[2], \dots, \mathbf{logL}[100]).$$

Plotten Sie schliesslich \mathbf{logL} als Funktion von λ und verifizieren Sie, dass das Maximum von \mathbf{logL} an der Stelle $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ angenommen wird.

- d) Wiederholen Sie die Schritte (a)-(c) noch einmal für verschiedene Werte von n , etwa $n = 2000, 4000, 8000$ und $n = 16000$.