Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

4. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Gegeben sei die Matrix X der Regressoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$,

$$X \; = \; \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \; := \; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{y} \; := \; \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die folgenden Berechnungen durch, mit Bleistift und Paper:

a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion $P_X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf den durch $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aufgespannten Unterraum L_X.

b) Überprüfen Sie, dass tatsächlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_X^2 &= P_X \\ P_X^T &= P_X \end{aligned}$$

erfüllt sind.

c) Überprüfen Sie, dass tatsächlich die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_X \vec{x}_1 &= \vec{x}_1 \\ P_X \vec{x}_2 &= \vec{x}_2 \end{aligned}$$

erfüllt sind.

d) Berechnen Sie die Bestapproximation in L_X

$$\vec{y}_{\min} \; = \; P_X \vec{y}$$

an das $\vec{y}$.

e) Berechnen Sie die Regressionskoeffizienten β_1 und β_2 für die Bestapproximation, also die Koeffizienten β_1 und β_2 so dass gilt

$$\vec{y}_{\min} \; = \; \beta_1 \, \vec{x}_1 \; + \; \beta_2 \, \vec{x}_2$$

f) Berechnen Sie die Projektion $P_{X^\perp}$ auf das orthogonale Komplement $L_{X^\perp}$ sowie den Vektor $\vec{y}^\perp = P_{X^\perp} \vec{y}$.

g) Überprüfen Sie, dass tatsächlich die Gleichungen

$$\vec{y} \; = \; \vec{y}_{\min} + \vec{y}^\perp$$

und

$$\vec{y}_{\min} \cdot \vec{y}^\perp \; = \; 0$$

erfüllt sind.