Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

3. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Starten Sie eine R-Session und codieren Sie eine Funktion

$$\texttt{MyRegression}(\texttt{y}, \texttt{X})$$

die eine Liste mit folgenden Rückgabewerten zurückgibt:

$$\begin{aligned}
\texttt{MyRegression}[[1]] &= \texttt{MyRegression\$betas} \\
\texttt{MyRegression}[[2]] &= \texttt{MyRegression\$fittedvalues} \\
\texttt{MyRegression}[[3]] &= \texttt{MyRegression\$errors}
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\vec{y} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad X \;=\; \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{x}_0 & \vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{n\times(p+1)}$$

und die Funktion soll die lineare Regression

$$\vec{y} \;=\; \beta_0\vec{x}_0 \;+\; \beta_1\vec{x}_1 \;+\; \cdots \;+\; \beta_p\vec{x}_p \;+\; error$$

durchführen und die entsprechenden Resultate, die wir in der Vorlesung definiert und hergeleitet haben, in die zurückzugebende Liste schreiben. Das heisst genauer, die Funktion soll die Grössen

$$\begin{aligned}
\texttt{betas} \;&:=\; \vec{\beta} \;=\; A^{-1}b \;=\; (X^TX)^{-1}X^T\,\vec{y} \\
\texttt{fittedvalues} \;&:=\; \widehat{y} \;=\; \textstyle\sum_{j=0}^{p}\beta_j\vec{x}_j \;=\; X\vec{\beta} \;=\; X(X^TX)^{-1}X^T\,\vec{y} \\
\texttt{errors} \;&:=\; \vec{y}-\widehat{y} \;=\; \left[\,Id - X(X^TX)^{-1}X^T\,\right]\vec{y}
\end{aligned}$$

berechnen und in die zurückzugebende Liste schreiben. Weiterhin soll bei Ausführung der Funktion ein Plot gezeigt werden, in dem der zu fittende Datenvektor $\vec{y}$ gezeigt ist, in schwarz, und die fitted values in rot dargestellt sind, beide Grössen in einem Diagramm.

Überprüfen Sie schliesslich Ihre Implementation, indem Sie eine lineare Regression für ein konkretes Datenbeispiel durchführen und Ihre Resultate dann mit denen der `lm()`-Funktion vergleichen.

Informationen zum Codieren von Funktionen können Sie etwa im 6. Kapitel "Programmieren in R" des RSkript_UniGiessen finden,

`http://hsrm-mathematik.de/WS2223/semester5/Oekonometrie/GerritEichner-UniGiessen-R1-4.pdf`

und Informationen zu Listen sind dort im Kapitel 2.9 zu finden.

Aufgabe 2: Beweisen Sie das Lemma 3.1 aus der Vorlesung, das war die folgende Aussage: Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{x}_0, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p \quad \in \quad \mathbb{R}^n$$

mit $n \geq p + 1$. Dann gilt: Die Matrix der Skalarprodukte

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \vec{x}_0\vec{x}_0 & \vec{x}_0\vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_0\vec{x}_p \\ \vec{x}_1\vec{x}_0 & \vec{x}_1\vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_1\vec{x}_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{x}_p\vec{x}_0 & \vec{x}_p\vec{x}_1 & \cdots & \vec{x}_p\vec{x}_p \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn die Vektoren

$$\vec{x}_0, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p$$

linear unabhängig sind.