Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

10. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Beweisen Sie die Behauptung 3 aus dem Beweis zu Theorem 10.2, das war die folgende Aussage (wir ersetzen das $n-(p+1)$ durch ein m): Für beliebige reelle Zahlen $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \quad \geq \quad \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2 \, .$$

Aufgabe 2: Es sei

$$A \quad = \quad (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \quad \in \quad \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit

$$A^T \quad = \quad A$$

eine reelle, symmetrische $n \times n$ Matrix und

$$\phi \quad = \quad (\phi_1, \cdots, \phi_n)$$

seien n unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Wir betrachten die Zufallsvariable

$$Q(\phi) \quad := \quad \langle \phi, A\phi \rangle \quad = \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \phi_i \phi_j$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$\mathsf{E}[Q] \quad = \quad \mathrm{Tr}(A)$$

b) Es gilt

$$\mathsf{V}[Q] \quad = \quad 2\,\mathrm{Tr}(A^2)$$

Schauen Sie sich dazu gegebenenfalls noch einmal den Beweis von Behauptung 2 aus dem Beweis zum Theorem 10.2 an.

c) Gilt die Aussage aus Teil (b) auch für beliebige, nicht notwendig symmetrische Matrizen? Finden Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel. Können Sie auch jetzt noch eine allgemeine Formel für $\mathsf{V}[Q]$ angeben?

d) Überprüfen Sie die Formeln aus Teil (a) und (b) durch eine geeignete R-Simulation.