

1. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Gegeben seien die Daten-Vektoren

$$\vec{x} = (-6, -4, -2, 0, +2, +4, +6)$$

und

$$\vec{y} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Führen Sie, mit Bleistift und Papier, für das Modell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + error_i \quad (1)$$

eine lineare Regression durch. Das heisst, bestimmen Sie die Koeffizienten β_0 und β_1 , die am besten, im Sinne der L^2 -Regression, zu dem Modell (1) passen. Benutzen Sie dazu die expliziten Formeln aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: Es seien die n Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n vorgegeben und wir nehmen an, dass wir n Zahlen y_1, \dots, y_n haben und zwischen den y_i und den x_i bestehe ein exakter linearer Zusammenhang. Das heisst, wir nehmen an, dass die y_i explizit gegeben sind durch

$$y_i = a x_i + b \quad (2)$$

für $i = 1, \dots, n$. Wir wollen im Teil (c) dieser Aufgabe überprüfen, dass die expliziten Formeln aus der Vorlesung für die L^2 -Regression in diesem Fall tatsächlich die Koeffizienten a und b aus Gleichung (2) reproduzieren tun.

a) Betrachten Sie das Regressionsmodell

$$y_i = \beta_0 + error_i \quad (3)$$

für die Daten gegeben durch Gleichung (2) und bestimmen Sie das β_0 mit Hilfe einer L^2 -Regression, das heisst, durch die Forderung

$$\text{Summe Fehlerquadrate} = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0)^2 \stackrel{!}{\rightarrow} \text{minimal}$$

Schreiben Sie das Ergebnis für β_0 so, dass es nur von a, b und den x_i abhängt.

b) Betrachten Sie das Regressionsmodell

$$y_i = \beta_1 x_i + error_i \quad (4)$$

für die Daten gegeben durch Gleichung (2) und bestimmen Sie das β_1 mit Hilfe einer L^2 -Regression, das heisst, durch die Forderung

$$\text{Summe Fehlerquadrate} = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 x_i)^2 \stackrel{!}{\rightarrow} \text{minimal}$$

Schreiben Sie das Ergebnis für β_1 so, dass es nur von a, b und den x_i abhängt.

c) Betrachten Sie das Regressionsmodell

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + error_i \quad (5)$$

für die Daten gegeben durch Gleichung (2) und bestimmen Sie das β_0 und das β_1 mit Hilfe einer L^2 -Regression, das heisst, durch die Forderung

$$\text{Summe Fehlerquadrate} = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2 \stackrel{!}{\rightarrow} \text{minimal}$$

Hier sollen Sie jetzt die expliziten Formeln für β_0 und β_1 aus der Vorlesung benutzen, da hatten wir das Minimum ja schon berechnet, und dann für die y_i die Werte $ax_i + b$ einsetzen. Zeigen Sie dann, dass sich $(\beta_0, \beta_1) = (b, a)$ ergibt so wie es sein soll. In den Aufgabenteilen a) und b) bekommen Sie nicht $\beta_0 = b$ oder $\beta_1 = a$, sondern es kommt etwas anderes heraus.