Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

Probe-Klausur zur Vorlesung Ökonometrie

Theorie-Teil: Aufgaben 1-3: 40 Punkte
Programmier-Teil: Aufgaben 4-7: 40 Punkte

(die eigentliche Klausur wird kürzer)

1.Aufgabe (15 Punkte): Es sei

$$\vec{x} \;=\; (-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5)$$

und $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{11})$ seien mit Mittelwert 0 und Standardabweichung σ normalverteilte Zufallszahlen.

a) Betrachten Sie das Regressionsproblem

$$\vec{y} \;=\; \beta_1\,\vec{x} \,+\, \vec{\varepsilon}$$

Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1(\vec{y})$ an und vereinfachen Sie den Ausdruck soweit wie möglich. Benutzen Sie dazu die konkreten Werte der x_i (die y_i sollen variabel sein, da haben Sie also Buchstaben, keine Zahlen).

b) Betrachten Sie das Regressionsproblem ($i = 1, 2, ..., 11$)

$$y_i \;=\; \beta_0 \,+\, \beta_1\,x_i \,+\, \varepsilon_i$$

Geben Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ als Funktion von $y_1, \cdots, y_n$ an und vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich.

c) Geben Sie Formeln für die Varianzen von $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ aus Teil (b) an und vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich.

2.Aufgabe (12 Punkte): (ÜBlatt4, Aufg.1) Gegeben sei die Matrix X der Regressoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$,

$$X \;=\; \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{y} \;:=\; \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion $P_X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf den durch $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aufgespannten Unterraum L_X.

b) Berechnen Sie die Bestapproximation in L_X

$$\vec{y}_{\mathrm{min}} \;=\; P_X \vec{y}$$

an das $\vec{y}$.

c) Berechnen Sie die Regressionskoeffizienten β_1 und β_2 für die Bestapproximation, also die Koeffizienten β_1 und β_2 so dass gilt

$$\vec{y}_{\mathrm{min}} \;=\; \beta_1\,\vec{x}_1 \;+\; \beta_2\,\vec{x}_2 \;\;.$$

3.Aufgabe (13 Punkte): Zufallszahlen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ heissen Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn sie ganzzahlig sind, $x_i \in \mathbb{N}_0 = \{\,0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots\}$ für alle i, und wenn

$$\mathsf{Prob}[\,x_i = k\,] \;=\; \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}\;, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Von der Stichprobe $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sei bekannt, dass es mit Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallszahlen sind, aber der Wert von λ sei unbekannt.

a) Schätzen Sie λ mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode, d.h. geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n)$ für λ an.

b) Ist der Schätzer aus (a) erwartungstreu? Was müssten Sie hier genau zeigen? Versuchen Sie, möglichst weit zu rechnen.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Bestimmen Sie die Koeffizienten $\{c_k\}_{k=0}^{10}$ der Potenzreihenentwicklung

$$\log[1+x] \;=\; \sum_{k=0}^{10} c_k\,x^k \;+\; \text{error}$$

numerisch mit Hilfe einer linearen Regression. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Legen Sie die Variablen $n = 1000$, $m = 10$ und den Vektor

```
x = seq( from = -0.5 , to = 0.5 , length = n )
```

in R an, wir diskretisieren also das Intervall $[-0.5, 0.5]$ mit $n = 1000$ Punkten.

b) Legen Sie die Matrix X der Regressoren $x, x^2, ..., x^m$ an.

c) Legen Sie den Vektor $y = \log[1+x]$ an und führen Sie schliesslich die lineare Regression durch.

d) Plotten Sie die Grössen $\{\,c_k\}_{k=0}^{10}$ und $\{k\,c_k\}_{k=0}^{10}$ als Funktion von $k = 0, 1, ..., 10$.

e) Plotten Sie die Funktion $\log[1+x]$ und den Regression-Fit über dem Intervall $[-0.5, 0.5]$ in einem Diagramm, den Regression-Fit in rot.

Aufgabe 5 (8 Punkte):

a) Erzeugen Sie $N = 10000$ t_4-verteilte Zufallszahlen in R und stellen Sie sie in einem Histogramm dar. Wählen Sie die Skalierung des Histogramms so, dass die empirische Verteilung der Zufallszahlen mit der theoretischen Dichte der t_4-Verteilung vergleichbar ist. Stellen Sie beides in einem Diagramm dar, die theoretische Dichte in rot. Benutzen Sie den `breaks`-Parameter, um die Anzahl der dargestellten Rechtecke im Histogramm zu erhöhen.

b) Nehmen wir an, Sie wüssten von den Zufallszahlen aus (b) nur, dass sie t_n-verteilt sind, kennen aber den Wert von n nicht. Berechnen Sie die log-Likelihood-Funktion zum Schätzen von n und plotten Sie sie als Funktion von $n \in \{1, 2, 3, \cdots, 19, 20\}$. Das Maximum sollte dann also in der Nähe von $n = 4$ liegen.

Aufgabe 6 (12 Punkte): Laden Sie sich von der Vorlesungshomepage die Datei `co2levels-MaunaLoa.csv` herunter. Sie enthält Zahlen zur CO_2-Konzentration in der Atmosphäre für den Zeitraum 1958 - 2015.

a) Importieren Sie die Daten nach R und speichern Sie sie in dem Dataframe `co2levels`. Informieren Sie sich über den `na.omit()`-Befehl und eliminieren Sie dann sämtliche Zeilen, die `NA`'s enthalten. Wieviele Observations bleiben dann noch übrig?

b) Speichern Sie die Daten der Spalte `co2 level` in dem Vektor `yfull` und die Daten der Spalte `trend comp` in dem Vektor `ytrend`. Speichern Sie weiterhin die Daten der Spalte `decimal date` in den Vektor `zeit`. Plotten Sie dann `yfull` und `ytrend` als Funktion von `zeit`. Dabei soll der Plot jeweils aus einer durchgezogenen Linie bestehen, also keine einzelnen Punkte.

c) Fitten Sie das Modell (mit $t_0 = 1958.208 = \texttt{zeit}[1]$)

$$\texttt{ytrend}(t) \quad = \quad a_0 + a_1(t - t_0) \tag{1}$$

an die Daten, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 mit Hilfe einer linearen Regression.

d) Geben Sie für den Koeffizienten a_1 ein 90%-Vertrauensintervall an.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Betrachten Sie das Regressionsproblem

$$y_i \quad = \quad \beta_0 \; + \; \beta_1 \, x_i \; + \; \varepsilon_i \tag{2}$$

mit

$$\vec{x} \quad = \quad (-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

und

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 4 \\ \beta_1 &= -1 \end{aligned}$$

und $\sigma = 2$. Generieren Sie $N = 10000$ Datenvektoren $\vec{y}$ mit der Spezifikation (2) und führen Sie für jedes dieser $\vec{y}$'s eine lineare Regression für das Modell (2) durch. Zeigen Sie dann, dass die Grösse (für jedes Regressions-Resultat können Sie ein ξ berechnen)

$$\xi \;:=\; \frac{(\vec{y} - X\hat{\beta})^2}{\sigma^2} \;=\; \frac{(\vec{y} - \hat{y})^2}{\sigma^2} \;=\; [n - (p+1)]\,\frac{\widehat{\sigma^2}}{\sigma^2} \;=\; (11-2)\frac{\widehat{\sigma^2}}{2^2}$$

$\chi^2_{11-2} = \chi^2_9$-verteilt ist, indem Sie ein Histogramm der ξ's erzeugen und dann diesem Histogramm ein Plot der Dichte der χ^2_9-Verteilung, in rot, hinzufügen.