Lösungen Übungsblatt 9 Ökonometrie

Aufgabe 1: **a)** Mit

$$\vec{y} \;=\; X\vec{\beta} \,+\, \vec{\varepsilon}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\mathrm{ML}}(\vec{y}) &= (X^TX)^{-1}X^T\vec{y} \\ &= (X^TX)^{-1}X^T\big(X\vec{\beta} \,+\, \vec{\varepsilon}\big) \\ &= \vec{\beta} \,+\, (X^TX)^{-1}X^T\vec{\varepsilon}\end{aligned}$$

$\hat{\beta}_{\mathrm{ML}}(\vec{y})$ ist also eine Summe von normalverteilten Zufallszahlen und eine Summe von normalverteilten Zufallszahlen ist auch wieder normalverteilt. Die Formeln für den Mittelwert $\mathsf{E}\big[\,\hat{\beta}_{j,\mathrm{ML}}\,\big] = \beta_j$ und die Varianz $\mathsf{V}\big[\,\hat{\beta}_{j,\mathrm{ML}}\,\big] = \sigma^2(X^TX)^{-1}_{j,j}$ hatten wir bereits in der Vorlesung gezeigt.

b) Wir fangen an wie im Beweis von Teil (b) des Theorems 9.1: Es war

$$\widehat{s^2} \;=\; \tfrac{1}{n-(p+1)}\,\big[\,P_{X^\perp}\vec{y}\,\big]^2$$

mit

$$P_X \;=\; X(X^TX)^{-1}X^T$$

und

$$P_{X^\perp} \;=\; Id - P_X \;.$$

Mit

$$\vec{y} \;=\; X\vec{\beta} \,+\, \vec{\varepsilon}$$

bekommen wir dann

$$P_{X^\perp}\vec{y} \;=\; P_{X^\perp}X\vec{\beta} \,+\, P_{X^\perp}\vec{\varepsilon}$$

Wegen

$$\begin{aligned}P_{X^\perp}X &= [Id - P_X]X \\ &= X \,-\, X(X^TX)^{-1}X^TX \\ &= X \,-\, X \;=\; 0\end{aligned}$$

haben wir also

$$P_{X^\perp}\vec{y} \;=\; P_{X^\perp}\vec{\varepsilon}$$

und damit

$$\widehat{s^2}\big(X,\,\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}\big) \;=\; \tfrac{1}{n-(p+1)}\,\big[\,P_{X^\perp}\vec{\varepsilon}\,\big]^2$$

Wir wählen jetzt eine ONB

$$\mathcal{B} \;=\; \big\{\,\vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \cdots\ ,\ \vec{v}_{n-1}\,\big\}$$

vom $\mathbb{R}^n$ folgendermassen: Die ersten $p+1$ Vektoren

$$\vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \cdots\ ,\ \vec{v}_p$$

sind eine ONB von X, der Raum der von den Regressoren $\vec{x}_0, \cdots, \vec{x}_p$ aufgespannt wird, und die restlichen $n-(p+1)$ Vektoren

$$\vec{v}_{p+1},\ \vec{v}_{p+2},\ \cdots\ ,\ \vec{v}_{n-1}$$

sind eine ONB von $X^\perp$. Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} \;&=\; \sum_{k=0}^{n-1} \langle \vec{\varepsilon}, \vec{v}_k\rangle\, \vec{v}_k \\ P_{X^\perp}\vec{\varepsilon} \;&=\; \sum_{k=p+1}^{n-1} \langle \vec{\varepsilon}, \vec{v}_k\rangle\, \vec{v}_k \end{aligned}$$

und

$$\widehat{s^2}(\vec{y}) \;=\; \tfrac{1}{n-(p+1)}\,\big[P_{X^\perp}\vec{\varepsilon}\,\big]^2 \;=\; \tfrac{1}{n-(p+1)} \sum_{k=p+1}^{n-1} \langle \vec{\varepsilon}, \vec{v}_k\rangle^2$$

Das hatten wir alles schon im Beweis von Teil (b) des Theorems 9.1 gemacht. Jetzt:

Für eine beliebige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben wir dann:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\Big[\,F\big(\,\widehat{s^2}(\vec{y})\,\big)\,\Big] \;&=\; \mathsf{E}\bigg[\,F\Big(\tfrac{1}{n-(p+1)} \sum_{k=p+1}^{n-1} \langle \vec{\varepsilon}, \vec{v}_k\rangle^2\Big)\,\bigg] \\ &\overset{\text{Hilfssatz 9.2}}{=}\; \mathsf{E}\bigg[\,F\Big(\tfrac{1}{n-(p+1)} \sum_{k=p+1}^{n-1} \varepsilon_k^2\Big)\bigg] \\ &\overset{\varepsilon_k=\sigma\phi_k}{=}\; \mathsf{E}\bigg[\,F\Big(\tfrac{\sigma^2}{n-(p+1)} \sum_{k=p+1}^{n-1} \phi_k^2\Big)\bigg] \end{aligned}$$

wobei die ϕ_k's in der letzten Zeile dann standard-normalverteilte Zufallszahlen sind, die haben also nicht mehr Varianz σ^2 wie die ε_k's sondern haben Varianz 1 und das $\mathsf{E}[\,\cdot\,]$ in der letzten Zeile meint dann also den Erwartungswert bezüglich standard-normalverteilte Zufallszahlen.

Eine Summe von Quadraten von standard normalverteilten Zufallszahlen ist χ^2-verteilt, sowas wird typischerweise in einer Stochastik-Vorlesung bewiesen, etwa im Teil (a) des Satzes 3.1.3 aus dem `week4b.pdf` aus der Stochastik II Vorlesung aus dem Sommersemester 2021,

`http://hsrm-mathematik.de/SS2021/semester4/Stochastik2/week4b.pdf`

dort wurde die χ^2-Verteilung hergeleitet. Wir bekommen

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Big[\, F\big(\, \widehat{s^2}(\vec{y})\,\big)\,\Big] \quad &= \quad \mathsf{E}\Big[\, F\Big(\, \tfrac{\sigma^2}{n-(p+1)} \sum_{k=p+1}^{n-1} \phi_k^2 \,\Big)\,\Big] \\
&\overset{\substack{\text{StochastikII} \\ \text{Satz 3.1.3}}}{=} \quad \int_0^\infty F\Big(\, \tfrac{\sigma^2}{n-(p+1)}\, y \,\Big)\, p_{\chi^2_{n-(p+1)}}(y)\, dy \\
&= \quad \int_0^\infty F\big(\, x\,\big)\, p_{\chi^2_{n-(p+1)}}\big(\, \tfrac{n-(p+1)}{\sigma^2}\, x\,\big)\, \tfrac{n-(p+1)}{\sigma^2}\, dx
\end{aligned}$$

Also hat das $\widehat{s^2}(\vec{y})$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\tfrac{n-(p+1)}{\sigma^2}\, p_{\chi^2_{n-(p+1)}}\big(\, \tfrac{n-(p+1)}{\sigma^2}\, x\,\big)$$

wobei $p_{\chi^2_m}(y)$ die Dichte der χ^2_m-Verteilung ist, gegeben durch die Formel aus dem Teil (a) des Satzes 3.1.3 aus der Stochastik II Vorlesung.