Lösungen Übungsblatt 8 Ökonometrie

Aufgabe 1: **a)** Wir können die Varianz einer Zufallsvariablen Z mit der Formel

$$\mathsf{V}[Z] \;=\; \mathsf{E}[Z^2] \,-\, \mathsf{E}[Z]^2$$

berechnen. Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,\{\hat\lambda_{\rm ML}(x_1,...,x_n)\}^2\,\big] \quad &= \quad n^2\times\mathsf{E}\Bigg[\frac{1}{\big(\sum_{i=1}^n x_i\big)^2}\Bigg]^2 \\
&= \quad n^2\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \frac{1}{\big(\sum_{i=1}^n x_i\big)^2}\,\lambda^n\,e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\,d^nx \\
&\overset{\text{Blatt6,1f}}{=} \quad n^2\int_0^\infty \frac{1}{y^2}\,\lambda^n\,e^{-\lambda y}\,\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\,dy \\
&= \quad \frac{n^2}{(n-1)!}\int_0^\infty y^{n-3}\,\lambda^n\,e^{-\lambda y}\,dy \\
&= \quad \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)!}\int_0^\infty x^{n-3}\,e^{-x}\,dx \\
&\overset{\text{Blatt6,1g}}{=} \quad \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)!}\times(n-3)! \;=\; \frac{n^2\lambda^2}{(n-1)(n-2)}\times\lambda^2
\end{aligned}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}\big[\,\{\hat\lambda^2_{\rm ML}\,\big] \;&=\; \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\,\lambda^2 \;-\; \frac{n^2}{(n-1)^2}\,\lambda^2 \\
&=\; \frac{n^2}{n-1}\bigg\{\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\bigg\}\times\lambda^2 \\
&=\; \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\,\lambda^2
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Prob}\big[\,\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} \in [x, x+dx)\,\big] \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \chi\big(\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \in [x, x+dx)\,\big) \prod_{i=1}^n \lambda\, e^{-\lambda x_i}\, dx_i \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \chi\Bigg(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i} \in [x, x+dx)\Bigg)\ \lambda^n\ e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}\ d^n x \\
&\overset{\text{Blatt6,1f}}{=} \int_0^\infty \chi\Bigg(\frac{n}{y} \in [x, x+dx)\Bigg)\ \lambda^n\ e^{-\lambda y}\ \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy \\
&\overset{x:=\frac{n}{y} \Leftrightarrow y=\frac{n}{x}}{=} \int_0^\infty \chi\big(x \in [x, x+dx)\,\big)\ \lambda^n\ e^{-\frac{n\lambda}{x}}\ \frac{(n/x)^{n-1}}{(n-1)!}\, \frac{n\,dx}{x^2} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\, \frac{(n\lambda)^n}{x^{n+1}}\, e^{-\frac{n\lambda}{x}}\ dx \quad .
\end{aligned}
$$