Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

Lösungen Übungsblatt 6 Ökonometrie

Aufgabe 1: **a)** Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x\,] &= \int_0^\infty x\,\lambda\,e^{-\lambda x}dx \\
&\overset{v=\lambda x}{=} \int_0^\infty v\,e^{-v}\,\tfrac{dv}{\lambda} \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=} \frac{1}{\lambda}\Big\{-v\,e^{-v}\Big|_0^\infty \;-\; \int_0^\infty(-e^{-v})dv\Big\} \\
&= \frac{1}{\lambda}\Big\{\,0\;+\;\int_0^\infty e^{-v}dv\Big\} \;=\; \frac{1}{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

b) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(\{x_i\},\lambda) &= \prod_{i=1}^n \mathsf{Prob}\big[\,x_i\in[x_i,x_i+dx_i)\,\big] \\
&= \prod_{i=1}^n \lambda\,e^{-\lambda x_i}\,dx_i \\
&= \lambda^n\;e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\;\textstyle\prod_{i=1}^n dx_i
\end{aligned}$$

und für den Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\log L(\{x_i\},\lambda) &= \log\Big[\,\lambda^n\,e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\;\textstyle\prod_{i=1}^n dx_i\Big] \\
&= n\log\lambda \;-\; \lambda\sum_{i=1}^n x_i \;+\; \text{const} \\
&=: F(\lambda)\;+\;\text{const}
\end{aligned}$$

wobei die Konstante

$$\text{const} \;:=\; \log\Big[\textstyle\prod_{i=1}^n dx_i\Big]$$

nur von λ unabhängige Terme enthält.

c) Wir maximieren F:

$$\begin{aligned}
F'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \overset{!}{=} 0 \\
\lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}
\end{aligned}$$

also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \quad = \quad \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

d) Der Erwartungswert von $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ muss gleich λ sein. Der Erwartungswert von $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ ist durch folgendes Integral gegeben:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n)\,\big] \quad &= \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \prod_{i=1}^{n} \lambda\, e^{-\lambda x_i}\, dx_i \\
&= \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}\ \lambda^n\ e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}\ d^n x \quad \overset{?}{=} \quad \lambda
\end{aligned}$$

e) Mit der Formel aus Teil (f) erhalten wir

$$\mathsf{E}\big[\,\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n)\,\big] \quad = \quad \int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{n}\,y}\ \lambda^n\ e^{-\lambda y}\ \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\, dy$$

$$\begin{aligned}
&= \quad \frac{n\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty y^{n-2}\, e^{-\lambda y}\, dy \\
&\overset{x=\lambda y}{=} \quad \frac{n\lambda}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-2}\, e^{-x}\, dx \\
&\overset{(g)}{=} \quad \frac{n\lambda}{(n-1)!}\ (n-2)! \ = \ \frac{n}{n-1}\ \lambda\ ,
\end{aligned}$$

also ist

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{mod}}(x_1, ..., x_n) \quad := \quad \frac{n-1}{n}\ \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \ = \ \frac{1}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

ein erwartungstreuer Schätzer.

f) Wir substituieren

$$\begin{aligned}
y_n \quad &:= \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \\
y_{n-1} \quad &:= \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \\
&\ \vdots \\
y_2 \quad &:= \quad x_1 + x_2 \\
y_1 \quad &:= \quad x_1
\end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}
y_n - y_{n-1} \quad &= \quad x_n \\
y_{n-1} - y_{n-2} \quad &= \quad x_{n-1} \\
&\ \vdots \\
y_2 - y_1 \quad &= \quad x_2 \\
y_1 \quad &= \quad x_1
\end{aligned} \tag{1}$$

Der Integrationsbereich $(0,\infty)^n$ transformiert sich wie folgt:

$$\begin{aligned} x_n &\in (0,\infty) \\ x_{n-1} &\in (0,\infty) \\ &\vdots \\ x_2 &\in (0,\infty) \\ x_1 &\in (0,\infty) \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} y_n &\in (0,\infty) \\ y_{n-1} &\in (0,y_n) \\ y_{n-2} &\in (0,y_{n-1}) \\ &\vdots \\ y_2 &\in (0,y_3) \\ y_1 &\in (0,y_2) \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante $\det \frac{\partial x}{\partial y}$ ist gleich 1, da es eine Dreicksmatrix ist mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonale. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \\ &\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2 \int_0^{y_2} dy_1\ f(y_n) \\ &\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3 \int_0^{y_3} dy_2\ y_2\ f(y_n) \\ &\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_4} dy_3\ \frac{y_3^2}{2}\ f(y_n) \\ &\qquad = \int_0^\infty dy_n \int_0^{y_n} dy_{n-1} \cdots \int_0^{y_5} dy_4\ \frac{y_4^3}{3!}\ f(y_n) \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad = \int_0^\infty dy_n\ \frac{y_n^{n-1}}{(n-1)!}\ f(y_n) \end{aligned}$$

g) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^m\, e^{-y}\, dy &= y^m(-e^{-y})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty m y^{m-1}\,(-e^{-y})\, dy \\ &= 0 + m\int_0^\infty y^{m-1}\, e^{-y}\, dy \\ &= m(m-1)\int_0^\infty y^{m-2}\, e^{-y}\, dy \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&= m(m-1)\cdots 2\cdot 1\int_0^\infty y^0\, e^{-y}\, dy \\
&= m!\int_0^\infty e^{-y}\, dy \;=\; m!\,.
\end{aligned}
$$