Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

Lösungen Übungsblatt 10 Ökonometrie

Aufgabe 1: Beweisen Sie die Behauptung 3 aus dem Beweis zu Theorem 10.2, das war die folgende Aussage (wir ersetzen das $n-(p+1)$ durch ein m): Für beliebige reelle Zahlen $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \quad \geq \quad \frac{1}{m}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\Big)^2 \quad .$$

Lösung: Mit Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung, die lautet: Für beliebige Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, \cdots, a_n) \\ \vec{b} &= (b_1, \cdots, b_n) \end{aligned}$$

gilt

$$|\,\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle\,| \quad \leq \quad \|\vec{a}\|\;\|\vec{b}\|$$

oder in Koordinaten und quadriert:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \;\leq\; \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\Big)$$

Jetzt wählen wir

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1, \cdots, 1) \\ \vec{b} &= (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \end{aligned}$$

und bekommen

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \lambda_i\Big)^2 \;\leq\; \Big(\sum_{i=1}^{n} 1^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2\Big)$$

oder

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)^2 \;\leq\; n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2$$

Das ist äquivalent zur Aussage von Aufgabe 1,

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)^2 \;\leq\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \quad \blacksquare$$

Aufgabe 2: **a)** Wegen

$$\mathsf{E}[\phi_i\phi_j] \;=\; \delta_{i,j}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,Q(\phi)\,\big] &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\mathsf{E}[\phi_i\phi_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\delta_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \;=\; \mathrm{Tr}(A)
\end{aligned}$$

b) Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Es sei

$$\{\,\vec{v}_1\,,\,\vec{v}_2\,\cdots\,,\,\vec{v}_n\,\}$$

eine ONB aus Eigenvektoren von A, also

$$\begin{aligned}
A\vec{v}_i &= \lambda_i\,\vec{v}_i \\
\langle\vec{v}_i,\vec{v}_j\rangle &= \delta_{i,j}
\end{aligned}$$

und

$$A \;=\; V\,D\,V^T$$

mit

$$V \;=\; \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

und

$$D \;=\; \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
Q(\phi) &= \langle\phi, A\phi\rangle \\
&= \langle\phi, V\,D\,V^T\phi\rangle \\
&= \langle V^T\phi, D\,V^T\phi\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,(\vec{v}_i\cdot\phi)^2
\end{aligned}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}\big[\,Q\,\big] &= \mathsf{E}\big[\,Q^2\,\big] \;-\; \big(\,\mathsf{E}\big[\,Q\,\big]\,\big)^2 \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\,\mathsf{E}\big[\,(\vec{v}_i\cdot\phi)^2(\vec{v}_j\cdot\phi)^2\,\big] \;-\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir den Hilfssatz 9.2 an. Die Aussage von Teil (b) war: Es gilt die folgende Formel

$$\mathsf{E}\big[\,(\vec{v}_i\cdot\vec{\varepsilon})^2(\vec{v}_j\cdot\vec{\varepsilon})^2\,\big] \;=\; \begin{cases} 3\sigma^4 & \text{falls } \; i=j \\ \sigma^4 & \text{falls } \; i\neq j \end{cases}$$

In unserem Fall sind die ε_i die ϕ_i, ebenfalls normalverteilte Zufallszahlen, aber hier mit Standardabweichung $\sigma = 1$. Also,

$$\mathsf{E}\big[\,(\vec{v}_i\cdot\phi)^2(\vec{v}_j\cdot\phi)^2\,\big] \;=\; \begin{cases} 3 & \text{falls } \; i=j \\ 1 & \text{falls } \; i\neq j \end{cases}$$

Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}\big[\,Q\,\big] \;&=\; \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j\,\mathsf{E}\big[\,(\vec{v}_i\cdot\phi)^2(\vec{v}_j\cdot\phi)^2\,\big] \;-\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2 \\
&=\; \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i\lambda_j\,\mathsf{E}\big[\,(\vec{v}_i\cdot\phi)^2(\vec{v}_j\cdot\phi)^2\,\big] \;+\; \sum_{\substack{i,j=1\\ i=j}}^{n} \lambda_i\lambda_j\,\mathsf{E}\big[\,(\vec{v}_i\cdot\phi)^2(\vec{v}_j\cdot\phi)^2\,\big] \;-\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2 \\
&=\; \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i\lambda_j \;+\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\,3 \;-\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2 \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \;+\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\,2 \;-\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2 \\
&=\; \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)^2 \;+\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\,2 \;-\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2 \\
&=\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2 \;+\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\,2 \;-\; \big[\,\mathrm{Tr}(A)\,\big]^2 \\
&=\; 2\,\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \;=\; 2\,\mathrm{Tr}(A^2)
\end{aligned}$$

c) Für nicht-symmetrisches A muss die Aussage nicht gelten, denn: Sei etwa

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$Q(\phi) \;=\; \langle \phi, A\phi\rangle \;=\; \phi_1\phi_2$$

und wir bekommen

$$\mathsf{E}[Q] \;=\; \mathsf{E}[\phi_1\phi_2] \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}[Q] \;&=\; \mathsf{E}[\phi_1^2\phi_2^2] \;-\; \big(\,\mathsf{E}[\phi_1\phi_2]\,\big)^2 \\
&=\; \mathsf{E}[\phi_1^2]\;\mathsf{E}[\phi_2^2] \;-\; 0 \;=\; 1
\end{aligned}$$

Allerdings ist

$$A^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$. Um in einem solchen Fall die Varianz berechnen zu können, kann man ganz einfach das A vorher symmetrisieren,

$$Q(\phi) \;=\; \langle \phi, A\phi \rangle \;=\; \langle A^T \phi, \phi \rangle \;=\; \langle \phi, A^T \phi \rangle$$

und damit

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= \langle \phi, A\phi \rangle \\ &= \tfrac{1}{2} \Big\{ \langle \phi, A\phi \rangle \;+\; \langle \phi, A^T \phi \rangle \Big\} \\ &= \Big\langle \, \phi \, , \, \tfrac{A+A^T}{2} \, \phi \, \Big\rangle \end{aligned}$$

Mit der Formel aus Teil (b) folgt dann also

$$\mathsf{V}[Q] \;=\; 2 \, \mathrm{Tr}\Big[\, \Big(\tfrac{A+A^T}{2} \Big)^2 \, \Big] \;=\; \tfrac{1}{2} \, \mathrm{Tr}\Big[\, (A + A^T)^2 \, \Big] \; .$$