

Lösungen 1. Übungsblatt Ökonometrie

Aufgabe 1: Die Regressionskoeffizienten $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1)$ bekommen wir als Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec{\beta} = \vec{b}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \vec{e}\vec{e} & \vec{e}\vec{x} \\ \vec{e}\vec{x} & \vec{x}\vec{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}\vec{y} \\ \vec{x}\vec{y} \end{pmatrix}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (-6, -4, -2, 0, +2, +4, +6) \\ \vec{e} &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

und

$$\vec{y} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Damit erhalten wir die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \vec{e}\vec{e} &= 7 \\ \vec{e}\vec{x} &= 0 \\ \vec{x}\vec{x} &= 2(4 + 16 + 36) = 112 \\ \vec{x}\vec{y} &= 0 - 4 - 4 + 0 + 8 + 20 + 36 = 56 \\ \vec{e}\vec{y} &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 112 \end{pmatrix} \\ \vec{b} &= \begin{pmatrix} 21 \\ 56 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/112 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: a) Das β_0 ist gegeben durch das Minimum der Funktion

$$F(\beta_0) := \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0]^2$$

Notwendige Bedingung ist

$$\frac{dF}{d\beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_0] \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$\begin{aligned} n\beta_0 &= \sum_{i=1}^n \beta_0 = \sum_{i=1}^n y_i \\ \Leftrightarrow \beta_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i =: \bar{y} \end{aligned}$$

In unserem Fall ist $y_i = ax_i + b$, also

$$\beta_0 = \bar{y} = a\bar{x} + b .$$

b) Das β_1 ist gegeben durch das Minimum der Funktion

$$F(\beta_1) := \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_1 x_i]^2$$

Notwendige Bedingung ist

$$\frac{dF}{d\beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n x_i [y_i - \beta_1 x_i] \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^n \beta_1 x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n x_i (ax_i + b) = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i$$

Also,

$$\beta_1 = a + b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = a + b \frac{\bar{x}}{\overline{x^2}}$$

wenn wir etwa die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \bar{x} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \overline{x^2} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

benutzen.

c) Nach den Formeln aus der Vorlesung sind die Regressionskoeffizienten $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1)$ durch die Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec{\beta} = \vec{b}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \vec{e}\vec{e} & \vec{e}\vec{x} \\ \vec{e}\vec{x} & \vec{x}\vec{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}\vec{y} \\ \vec{x}\vec{y} \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir haben nun

$$y_i = a x_i + b$$

oder in Vektor-Schreibweise

$$\vec{y} = a\vec{x} + b\vec{e}$$

mit dem Vektor $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Damit bekommen wir die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \vec{e}\vec{y} &= a\vec{e}\vec{x} + b\vec{e}\vec{e} \\ \vec{x}\vec{y} &= a\vec{x}\vec{x} + b\vec{x}\vec{e} \end{aligned}$$

Also,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}\vec{y} \\ \vec{x}\vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\vec{e}\vec{x} + b\vec{e}\vec{e} \\ a\vec{x}\vec{x} + b\vec{x}\vec{e} \end{pmatrix}$$

Das können wir auch so schreiben:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}\vec{e} & \vec{e}\vec{x} \\ \vec{e}\vec{x} & \vec{x}\vec{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Also ist das Gleichungssystem

$$A\vec{\beta} = \vec{b}$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \vec{e}\vec{e} & \vec{e}\vec{x} \\ \vec{e}\vec{x} & \vec{x}\vec{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}\vec{e} & \vec{e}\vec{x} \\ \vec{e}\vec{x} & \vec{x}\vec{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} .$$