week4: Beispiele Rechnen mit Vektoren und Matrizen: Numerisches Lösen von DGLen, Teil2

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator und fügen der ungedämpften DGL vom letzten Mal noch einen Reibungsterm hinzu. Das heisst, wir betrachten die DGL

$$\ddot{x}_t \; + \; 2\mu\,\dot{x}_t \; + \; \varepsilon^2\,x_t \;\; = \;\; 0 \tag{1}$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir wieder

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0 \\ \dot{x}_{t=0} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

und wir wollen den Fall schwacher Dämpfung betrachten, d.h. wir nehmen an

$$\mu \;<\; \varepsilon$$

mit einem positiven Reibungsparameter $\mu > 0$, so dass die Wurzel

$$\omega \;:=\; \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$$

reell ist und nicht imaginär.

a) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen: Das x_t gegeben durch

$$x_t \;=\; x_0\,e^{-\mu t}\left[\cos\omega t \,+\, \tfrac{\mu}{\omega}\,\sin\omega t\right] \tag{3}$$

ist eine Lösung von (1) zu den Anfangsbedingungen (2). Plotten Sie dieses x_t auf dem Intervall $[0,T]$ etwa zu den folgenden Parameterwerten:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 \\ \mu &= 0.1 \\ x_0 &= 1 \\ T &= 50 \end{aligned}$$

b) Die DGL (1) ist äquivalent zum System

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= v_t \\ \dot{v}_t &= -\,\varepsilon^2\,x_t \,-\, 2\mu\,v_t \end{aligned} \tag{4}$$

aus welchem wir wieder eine Rekursion

$$\begin{aligned} x_{t+dt} &= x_t \,+\, v_t\,dt \\ v_{t+dt} &= v_t \,-\, (\varepsilon^2\,x_t \,+\, 2\mu\,v_t)\,dt \end{aligned} \tag{5}$$

bekommen. Implementieren Sie die Rekursion (5) in R und vergleichen Sie wieder mit der exakten, theoretischen Lösung.

c) Die Rekursion (5) können wir wieder in Matrix-Form schreiben,

$$\begin{pmatrix} x_{t+dt} \\ v_{t+dt} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & dt \\ -\varepsilon^2\,dt & 1-2\mu\,dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

oder

$$y_{t+dt} \;=\; R_{dt}\,y_t \tag{6}$$

mit $y_t := \binom{x_t}{v_t}$ und

$$R_{dt} \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & dt \\ -\varepsilon^2\,dt & 1-2\mu\,dt \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} dt$$

$$=:\; Id \,+\, A\,dt \tag{7}$$

mit einem

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \tag{8}$$

Die Lösung von (6) ist

$$y_{kdt} \;=\; R_{dt}^k\,y_0 \tag{9}$$

mit $y_0 \;=\; \binom{x_0}{v_0} \;=\; \binom{1}{0}$. Implementieren Sie die Lösung (9) mit Hilfe von Matrix-Operationen in R und plotten Sie wieder das x_t.

d) Wir schreiben das System (4) in Matrix-Form,

$$\dot{y}_t \;=\; A\,y_t \tag{10}$$

mit der Matrix A aus (8). Für das System (10) können wir für beliebiges, zeitunabhängiges A wieder sofort die Lösung

$$y_t \;=\; e^{tA}\,y_0 \tag{11}$$

hinschreiben. Es gilt nun die folgende Identität:

$$\begin{aligned} e^{tA} \;&=\; \exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} \\ &=\; e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos\omega t + \frac{\mu}{\omega}\sin\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\varepsilon^2\,\frac{\sin\omega t}{\omega} & \cos\omega t - \frac{\mu}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix} \\ &=\; e^{-\mu t}\left[\cos\omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\omega t}{\omega} \begin{pmatrix} +\mu & +1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \tag{12}$$

Überprüfen Sie diese Identität numerisch in R.