Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Datenanalyse mit R

Aufgabe 1: Das ARCH(1)-Modell war definiert durch den stochastischen Preisprozess

$$S(t_k) \;=\; S(t_{k-1}) \times \big\{\, 1 \,+\, \mathrm{vol}(t_{k-1})\, \phi_k \,\big\} \tag{1}$$

mit der Volatilitäts-Spezifikation

$$\mathrm{vol}^2(t_{k-1}) \;=\; w_0 \,\times\, \mathrm{bsvol}^2 \;+\; (1-w_0) \,\times\, \mathrm{ret}^2(t_{k-1})$$

Dabei sind die Returns wie üblich definiert durch

$$\mathrm{ret}(t_k) \;:=\; \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}$$

und die ϕ_k in Gleichung (1) sind unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Laden Sie sich die `SPX.txt` Zeitreihe und die Daten für die General Electric Aktie `GE.txt` von der VL-homepage herunter und calibrieren Sie dann ein ARCH(1)-Modell an diese Daten. Das heisst, bestimmen Sie diejenigen Parameter

$$(\mathrm{bsvol}, w_0)$$

die am besten, im Sinne der Maximum-Likelihood Methode, zu den jeweiligen Zeitreihendaten passen. Benutzen Sie dazu den Code aus dem `week9.txt`, Sie brauchen hier keine neuen Funktionen zu schreiben. Bestimmen Sie die Stelle des Maximums der Log-Likelihood-Funktion `logL` graphisch, indem Sie sich die Höhenlinien von `logL` in der (bsvol, w_0)-Ebene anschauen, also genau so, wie das auch im `week9.txt` gemacht wurde. Vergleichen Sie den Wert für bsvol wieder mit der Standardabweichung der Returns.

Aufgabe 2: Die Kurtosis $\kappa = \kappa(\vec{x})$ eines Datenvektors $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ist definiert durch

$$\kappa(\vec{x}) \;:=\; \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\big\}^2} \tag{2}$$

mit $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ und dient als Maß für 'heavy tails'. Entsprechend ist die Kurtosis einer Zufallsvariablen X definiert durch

$$\kappa(X) \;:=\; \frac{\mathsf{E}\big[\,(X - \mathsf{E}[X])^4\,\big]}{\mathsf{E}\big[\,(X - \mathsf{E}[X])^2\,\big]^2} \tag{3}$$

Für normalverteilte Zufallszahlen findet man den exakten analytischen Wert von $\kappa = 3$.

a) Starten Sie eine R-Session und codieren Sie eine Funktion `Kurtosis(x)`, die zu gegebenen Datenvektor $\vec{x}$ die Zahl $\kappa(\vec{x})$ aus (2) zurückgibt. Erzeugen Sie dann $n = 10000$ mit Mittelwert $\mu = 15$ und Standardabweichung $\sigma = 2$ normalverteilte Zufallszahlen und berechnen Sie die Kurtosis von diesen Zufallszahlen mit ihrer Funktion `Kurtosis(x)`, da sollte dann also in etwa eine 3 rauskommen.

b) Berechnen Sie die Kurtosis der Returns der Zeitreihen `DAX.txt`, `SPX.txt` und `GE.txt` von der VL-homepage.

c) Die SPX-Zeitreihe enthält genau einen Return, der betragsmässig grösser als 20% ist. Entfernen Sie diesen Return aus der SPX-Zeitreihe (oder überschreiben Sie ihn durch eine 0), und berechnen Sie dann die Kurtosis erneut.