Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

5. Übungsblatt zur Vorlesung Datenanalyse mit R

Aufgabe 1) Lesen Sie sich in `http://hsrm-mathematik.de/WS2223/semester5/Datenanalyse-mit-R/book.pdf` die Unterkapitel 4.1 und 4.2 durch, das sind die vier Seiten 65-68 über Conditional Execution und Loops. Schauen Sie sich dann noch die 3 Seiten

`http://hsrm-mathematik.de/WS2223/semester5/Datenanalyse-mit-R/W'keitsverteilungen-in-R.pdf`

an, die Informationen zum Generieren von Zufallszahlen bereitstellen.

a) Codieren Sie eine Schleife in R, die folgendes macht: Für $N \in \{100, 200, ..., 900, 1000\}$,

(i) erzeugen Sie eine $N \times N$ Zufallsmatrix, deren Einträge unabhängige, mit `mean` $= 0$ und `sd` $= 1$ normalverteilte Zufallszahlen sind

(ii) teilen Sie alle Matrix-Elemente durch $\sqrt{N}$

(iii) berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix aus (ii)

(iv) plotten Sie diese Eigenwerte in der komplexen Ebene

(v) fügen Sie vielleicht noch ein `Sys.sleep(dt)`-Befehl ein, etwa mit `dt=2.0` (Sekunden), so dass Sie genügend Zeit haben, sich jeweils das Resultat anzuschauen.

b) Wiederholen Sie noch einmal (a) mit `mean` $= 0$ und `sd` $= 4$ normalverteilten Zufallszahlen.

c) Wiederholen Sie noch einmal (a) mit `mean` $= 6$ und `sd` $= 4$ normalverteilten Zufallszahlen.

d) Legen Sie die Matrix

$$A \;:=\; \frac{\mu}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

an und berechnen Sie die Eigenwerte für $N \in \{100, 200, ..., 900, 1000\}$, etwa für $\mu = 6$.

e) Damit Sie aus mathematischer Sicht gesehen hier nicht ganz einnicken, berechnen Sie jetzt analytisch, mit Bleistift und Papier, sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit den Zahlen aus (d).

f) Wiederholen Sie noch einmal (a) mit $(n, p) = (100, 0.1)$-Binomial-verteilten Zufallszahlen. Bevor Sie in (a) den Schritt (ii) ausführen, ziehen Sie von sämtlichen Matrixelementen die Zahl $10 = n\,p$ ab, das ist der Erwartungswert der binomialverteilten Zufallszahlen. Die Standardabweichung ist $\sqrt{np(1-p)} = 3$.

g) Gehen Sie nun wie in Teil (f) vor, allerdings ersetzen Sie alle binomialverteilten Zufallszahlen oberhalb der Diagonalen durch mit `mean` $= 0$ und `sd` $= 3$ normalverteilte Zufallszahlen.

h) Formulieren Sie jetzt eine mathematische Vermutung über Zufallsmatrizen.