4. Übungsblatt zur Vorlesung
Datenanalyse mit R

Aufgabe 1) Wir betrachten die Differentialgleichung für eine erzwungene harmonische Schwingung gegeben durch

$$\ddot{x}_t \;+\; \varepsilon^2\, x_t \;=\; a_0 \,\sin \omega t \tag{1}$$

zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0 \\ \dot{x}_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

Die exakte, theoretische Lösung ist dann gegeben durch

$$x_t \;=\; x_0 \,\cos \varepsilon t \;+\; \frac{a_0}{\varepsilon^2 - \omega^2} \left\{ \sin \omega t \;-\; \frac{\omega}{\varepsilon} \,\sin \varepsilon t \right\} \tag{2}$$

a) Plotten Sie die exakte, theoretische Lösung auf dem Intervall $[0, T]$ zu den folgenden Parameterwerten:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 \\ \omega &= 2.1 \\ x_0 &= 1 \\ a_0 &= 0.5 \\ T &= 200 \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Differentialgleichung (1) numerisch, indem Sie sie wieder in ein System von 2 DGLs erster Ordnung umschreiben. Plotten Sie die numerische Lösung und die exakte, theoretische Lösung in demselben Plotfenster, die exakte Lösung in rot. Untersuchen Sie die Stabilität der numerischen Lösung, indem Sie die Werte dt für die Zeitdiskretisierung variieren, etwa

$$dt \;\in\; \{\, 0.1 \,,\, 0.01 \,,\, 0.001 \,,\, 0.0001 \,\} \;.$$

Aufgabe 2) Beweisen Sie die folgende Identität für das Matrix-Exponential von 2×2-Matrizen:

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} \;=\; e^{-\mu t} \left[\cos \omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;+\; \tfrac{\sin \omega t}{\omega} \begin{pmatrix} +\mu & +1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right]$$

Dabei ist $\omega := \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$. Als reine 'Papier und Bleistift Rechnung' wäre diese Aufgabe nicht klausurrelevant.