Hochschule RheinMain Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Datenanalyse mit R

Aufgabe 1) Im folgenden meint `book.pdf` wieder das Buch unter

`http://hsrm-mathematik.de/WS2223/semester5/Datenanalyse-mit-R/book.pdf`

Schauen Sie sich in `book.pdf` die vier Seiten 21-24 an, das ist das Kapitel 2.7.1 Forming Matrices. Legen Sie dann folgende Matrizen in R an:

a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 14 & 6 \\ 12 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2.2 & 3.3 & 1.1 \\ 4.56 & -7.89 & 1.23 \\ 800 & 400 & 200 \end{pmatrix}$$

b)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 99 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 100 & 100 & \cdots & 100 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & +1 & \cdots & +1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & +1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{100\times 100} \quad .$$

Aufgabe 2) Lesen Sie sich jetzt in `book.pdf` die Seiten 25-30 durch, das ist das Kapitel Operations on Matrices, das Kapitel 2.7.2 (das letzte Unterkapitel 2.7.2.8: Singular Value Decomposition können Sie weglassen). Führen Sie dann folgende Berechnungen durch:

a) Legen Sie die Matrix der diskreten Fourier-Transformation

$$F = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\left(e^{-2\pi i \frac{jk}{n}}\right)_{j,k\in\{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

an, für $n = 10$. Benutzen Sie dazu gegebenenfalls die `outer()`-Funktion.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte von F. Es sollten nur die Werte ± 1 und $\pm i$ auftreten.

c) Zeigen Sie, dass

$$F^4 = Id$$

gilt, wobei Id die $n \times n$ oder konkret dann die 10×10 Einheitsmatrix bezeichnet. Benutzen Sie gegebenenfalls den `zapsmall()`-Befehl, um numerical noise zu entfernen.

d) Zeigen Sie weiterhin numerisch in R: F ist eine unitäre Matrix, d.h. es gilt

$$F^* F = F F^* = Id$$

mit der adjungierten Matrix $F^* = \bar{F}^T$. Benutzen Sie gegebenenfalls wieder den `zapsmall()`-Befehl, um numerical noise zu entfernen.

Aufgabe 3) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem numerisch in R mit Hilfe des `solve()`-Befehls:

$$\begin{aligned} x + \tfrac{y}{2} + \tfrac{z}{3} &= 1 \\ \tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{3} + \tfrac{z}{4} &= 0 \\ \tfrac{x}{3} + \tfrac{y}{4} + \tfrac{z}{5} &= 0 \ . \end{aligned}$$