Hochschule RheinMain WS 2022/23
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 3. Übungsblatt
Datenanalyse mit R

Aufgabe 2) Wir beweisen die folgende, etwas allgemeinere Aussage für das Exponential von $2n \times 2n$ Matrizen: Es sei A eine beliebige reelle oder komplexe $n \times n$ Matrix und Ω sei eine $n \times n$ Matrix mit

$$\Omega^2 \;=\; A \tag{1}$$

Weiter bezeichne Id die $n \times n$ Einheitsmatrix. Dann gilt[1]

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei die $n \times n$ Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind.

Beweis: Wir haben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} \;=\; \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}^{k} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & A^k \\ -A^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $A = \Omega^2$ können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} \;=\; (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \;&=\; (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{2k} \\ -\Omega^{2k+2} & 0 \end{pmatrix} \\ &=\; (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

[1] es sei also vorausgesetzt, dass Ω^{-1} existiert

Damit bekommen wir also

$$
\begin{aligned}
\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\
&\overset{(3,4)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und die Formel ist bewiesen. ■