Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

9. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1: Der quantenmechanische Drehimpuls-Operator ist gegeben durch $\hbar\vec{L} = \hbar(L_1, L_2, L_3)$ mit

$$\vec{L} \;=\; \vec{x}\times\tfrac{1}{i}\nabla \;=\; \tfrac{1}{i}\begin{pmatrix} x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2} \\ x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$\vec{L}^{\,2} \;=\; L_1^2 + L_2^2 + L_3^3 \;=\; -\,\Delta_S \tag{2}$$

mit dem sphärischen Laplace-Operator Δ_S gegeben durch

$$\Delta \;=\; \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\Delta_S \tag{3}$$

Gehen Sie dazu etwa folgendermassen vor:

a) Berechnen Sie die Quadrate L_1^2, L_2^2 und L_3^2 und zeigen Sie

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^3 \;=\; r^2\Delta - \sum_{j=1}^{3} x_j^2\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - 2\sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} - 2\big\{\, x_2x_3\,\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} + \text{zyklisch}\,\big\}$$

mit $r^2 = \sum_{j=1}^{3} x_j^2\,.$

b) Zeigen Sie die Identitäten

$$r\frac{\partial}{\partial r} \;=\; \sum_{j=1}^{3} x_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,, \qquad \Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big)^2 \;=\; r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}$$

c) Lösen Sie die Gleichung (3) nach Δ_S auf und beweisen Sie schliesslich (2) mit Hilfe der Formeln aus (a) und (b).

Aufgabe 2: Beweisen Sie das Lemma 5.3.1 aus der Vorlesung, das war die folgende Aussage: Es sei $P = P(x)$ eine beliebige Funktion und

$$p(x) \;:=\; (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,P^{(m)}(x) \tag{4}$$

wobei $P^{(m)}$ die m-te Ableitung von P bezeichne. Dann gilt

$$(1-x^2)\,p''(x) \;-\; 2x\,p'(x) \;+\; \big[\,\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\,\big]\,p \tag{5}$$
$$= \;(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \Big\{\,(1-x^2)\,P'' \;-\; 2x\,P' \;+\; \lambda\,P\,\Big\}$$

Benutzen Sie dazu die Formel

$$(fg)^{(m)} \;=\; \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\,f^{(k)}\,g^{(m-k)} \tag{6}$$

für die m-te Ableitung eines Produktes $f(x)\cdot g(x)$.