Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

8. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass der klassische Drehimpuls

$$\vec{L} \;=\; \vec{x} \times \vec{p} \;=\; m\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

in Kugelkoordinaten (r, φ, θ) gegeben ist durch (die Kugelkoordinaten und die Basisvektoren $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ seien definiert wie in der Vorlesung)

$$\vec{L} \;=\; m\,r^2 \left\{ \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi \,-\, \dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\theta \right\}$$

mit

$$\vec{L}^{\,2} \;=\; (m\,r^2)^2 \left\{ \dot{\theta}^2 \,+\, \dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta \right\} \;.$$

Aufgabe 2: Der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^n$ in kartesischen Koordinaten $x = (x_1, \cdots, x_n)$ ist gegeben durch

$$\Delta \;=\; \tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \tfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} \;=\; \textstyle\sum_{j=1}^n \tfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{1}$$

Wir machen eine allgemeine Koordinatentransformation (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als Parameterbereich für die neuen Koordinaten)

$$x \;=\; x(u) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(u_1, \cdots, u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1, \cdots, u_n) \end{pmatrix} \;, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{2}$$

und wollen das Δ in den neuen Koordinaten $u = (u_1, \cdots, u_n)$ ausdrücken. Ist

$$f \;=\; f(x) \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion, und bezeichnen wir mit g die Funktion f, wenn wir sie in die neuen u-Koordinaten umgerechnet haben, also

$$g(u) \;:=\; f\big(x(u)\big) \tag{3}$$

dann suchen wir einen Differentialoperator Δ_u, der nur durch u-Variablen gegeben ist, so dass gilt

$$\big(\Delta f\big)(x(u)) \;=\; (\Delta_u g)(u) \;. \tag{4}$$

Beweisen Sie: Das Δ_u ist gegeben durch

$$\Delta_u \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det M}} \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_\ell} \sqrt{\det M}\, M^{-1}_{k,\ell} \frac{\partial}{\partial u_k} \tag{5}$$

Dabei ist M die Matrix der Skalarprodukte der Tangentialvektoren, gegeben durch

$$M \;=\; \begin{pmatrix} - & \frac{\partial x}{\partial u_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \frac{\partial x}{\partial u_n} & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial u_n} \\ | & & | \end{pmatrix} \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right)_{1\le j,k\le n} \tag{6}$$

Gehen Sie zum Beweis von (5) folgendermassen vor:

a) Wählen Sie eine beliebige differenzierbare Testfunktion $\varphi = \varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die im Unendlichen verschwindet, und zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta f)(x)\, \varphi(x)\, d^n x \;=\; -\int_{\mathbb{R}^n} \langle\, \nabla_x f \,,\, \nabla_x \varphi \,\rangle(x)\, d^n x \tag{7}$$

Dabei bezeichne $\langle\, \cdot\,,\, \cdot\,\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$.

b) Es sei jetzt $g(u) := f(x(u))$ wie in (3) und das φ in den neuen Koordinaten u sei etwa mit $\tilde\varphi$ bezeichnet, also $\tilde\varphi(u) = \varphi(x(u))$. Folgern Sie aus (7)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta f)(x)\, \varphi(x)\, d^n x \;=\; -\int_{\Omega} \Big\langle\, \big(\tfrac{\partial u}{\partial x}\big)^T \nabla_u g \,,\, \big(\tfrac{\partial u}{\partial x}\big)^T \nabla_u \tilde\varphi \,\Big\rangle(u)\, \big|\det \tfrac{\partial x}{\partial u}\big|\, d^n u \tag{8}$$

mit, als Spaltenvektor genommen[1],

$$\nabla_u \;:=\; \big(\tfrac{\partial}{\partial u_1}, \cdots, \tfrac{\partial}{\partial u_n}\big)$$

und den Matrizen

$$\frac{\partial x}{\partial u} \;:=\; \begin{pmatrix} | & & | \\ \frac{\partial x}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial u_n} \\ | & & | \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \;:=\; \begin{pmatrix} | & & | \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrix $M = M(u)$ sei wie in (6) definiert. Folgern Sie aus (8)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta f)(x)\, \varphi(x)\, d^n x \;=\; -\int_{\Omega} \Big\langle\, M^{-1} \nabla_u g \,,\, \nabla_u \tilde\varphi \,\Big\rangle(u)\, \sqrt{\det M}\, d^n u \tag{9}$$

d) Zeigen Sie schliesslich

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta f)(x)\, \varphi(x)\, d^n x \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_u g)(u(x))\, \varphi(x)\, d^n x \tag{10}$$

mit Δ_u gegeben durch (5). Da das φ beliebig war, folgt dann (4).

---

[1] okay, ist etwas inkonsistente Notation zu Δ_u was ja nicht die Summe der zweiten u-Ableitungen ist..