

7. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1 (Tunneleffekt): Wir betrachten die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung in einer Dimension

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right\} \varphi(x) = E \varphi(x)$$

mit der Potentialschwelle

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x \in [0, L] \\ 0 & \text{ausserhalb } [0, L] \end{cases}$$

für Energien $0 < E < V_0$. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= e^{+ikx} + R e^{-ikx} && \text{für } x < 0 \\ \varphi_1(x) &= A e^{+\kappa x} + B e^{-\kappa x} && \text{für } x \in [0, L] \\ \varphi_2(x) &= T e^{+ikx} && \text{für } x > L \end{aligned}$$

mit den Reflektions- und Transmissionskoeffizienten R und T . Dabei seien

$$\begin{aligned} k^2 &:= \frac{2mE}{\hbar^2} > 0 \\ \kappa^2 &:= \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} > 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= \varphi_1(0) \\ \varphi_0'(0) &= \varphi_1'(0) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} 2\kappa A &= R(\kappa - ik) + \kappa + ik \\ 2\kappa B &= R(\kappa + ik) + \kappa - ik \end{aligned}$$

b) Aus den Bedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(L) &= \varphi_2(L) \\ \varphi_1'(L) &= \varphi_2'(L) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} (\kappa - ik)A e^{+\kappa L} - (\kappa + ik)B e^{-\kappa L} &= 0 \\ 2\kappa A e^{+\kappa L} &= (\kappa + ik)T e^{+ikL} \end{aligned}$$

c) Definieren Sie jetzt den Winkel θ durch

$$\frac{k + i\kappa}{\sqrt{k^2 + \kappa^2}} = \sqrt{\frac{E}{V_0}} + i \sqrt{\frac{V_0 - E}{V_0}} = e^{i\theta}$$

und zeigen Sie dann

$$R = \frac{\sinh(\kappa L)}{\sinh(\kappa L + 2i\theta)} .$$

d) Der Transmissionskoeffizient T berechnet sich zu

$$T = e^{-ikL} \frac{i \sin(2\theta)}{\sinh(\kappa L + 2i\theta)} .$$

e) Zeigen Sie schliesslich: Die Reflektions- und Transmissionswahrscheinlichkeiten addieren sich zu 1,

$$|R|^2 + |T|^2 = 1$$

und die Transmissions- oder auch Tunnel-Wahrscheinlichkeit $|T|^2$ lässt sich schreiben als

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\kappa L)} .$$