Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

6. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1: Für ein freies Teilchen mit dem Anfangszustand

$$\psi_0(x) \;:=\; \frac{1}{\{2\pi\ell_0^2\}^{1/4}}\, e^{-\frac{x^2}{4\ell_0^2}}\, e^{i\,k_0 x}$$

hatten wir in der Vorlesung die Zeit-t-Wahrscheinlichkeitsdichte

$$|\psi_t(x)|^2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell_t^2}}\, e^{-\frac{(x-\omega'_{k_0}t)^2}{2\ell_t^2}}$$

hergeleitet mit der zeitabhängigen Breite

$$\ell_t^2 \;=\; \ell_0^2 \;+\; \Big(\frac{\omega''_{k_0}\,t}{2\ell_0}\Big)^2$$

Dabei war für nichtrelativistische massebehaftete Teilchen

$$\begin{aligned}\frac{\hbar k^2}{2m} \;=\; \omega_k \;&=\; \omega_{k_0} + \omega'_{k_0}(k-k_0) + \frac{\omega''_{k_0}}{2}(k-k_0)^2 \\ &=\; \frac{\hbar k_0^2}{2m} + \frac{\hbar k_0}{m}(k-k_0) + \frac{\hbar}{2m}(k-k_0)^2 \;\;.\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Zeit $t_{2\ell}$, in der sich die Breite der W'keitsdichte verdoppelt hat, also

$$\ell_{t_{2\ell}} \;\stackrel{!}{=}\; 2\ell_0$$

für allgemeine Parameterwerte.

b) Berechnen Sie $t_{2\ell}$ für ein Sandkorn mit

$$\begin{aligned}\ell_0 &= 0.5\,\mathrm{mm} \\ m &= 0.2\,\mathrm{mg}\;\;.\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie $t_{2\ell}$ für ein Elektron mit

$$\begin{aligned}\ell_0 &= 10^{-10}\,\mathrm{m} \;\approx\; \text{Durchmesser des H-Atoms} \\ m &= 511\,\mathrm{keV}/c^2\;\;.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Für zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ bezeichne

$$\langle f, g\rangle \;:=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

das Skalarprodukt in $L^2(\mathbb{R})$ und die Fouriertransformation wollen wir mit dem Buchstaben F bezeichnen, also $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit

$$(Ff)(k) \;=\; \hat f(k) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\,kx}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

a) Zeigen Sie: F ist eine unitäre Abbildung, d.h. es gilt

$$\langle Ff, Fg \rangle \quad = \quad \langle f, g \rangle$$

b) Es seien

$$\begin{aligned} H_0 \quad &:= \quad -\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\tfrac{d^2}{dx^2} \\ p \quad &:= \quad \tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{d}{dx} \end{aligned}$$

die quantenmechanischen Operatoren für die kinetische Energie und den Impuls in einer Dimension. Beweisen Sie: Die unitär transformierten Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 \quad &:= \quad F\, H_0\, F^{-1} \\ \hat{p} \quad &:= \quad F\, p\, F^{-1} \end{aligned}$$

sind Multiplikationsoperatoren, gegeben durch

$$\begin{aligned} (\hat{H}_0 \hat{f})(k) \quad &= \quad \tfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\, \hat{f}(k) \\ (\hat{p}\hat{f})(k) \quad &= \quad \hbar k\, \hat{f}(k) \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie schliesslich: Es gilt

$$F\, e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0}\, F^{-1} \quad = \quad e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0}$$

mit

$$\left(e^{-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}_0} \hat{f} \right)(k) \quad = \quad e^{-i \frac{\hbar k^2}{2m} t}\, \hat{f}(k) \quad .$$

Aufgabe 3: Es sei ψ_0 der Anfangszustand aus Aufgabe 1 und ψ_t die Lösung der freien, eindimensionalen Schrödinger-Gleichung zum Anfangszustand ψ_0,

$$i\hbar \tfrac{\partial}{\partial t}\, \psi_t \quad = \quad H_0\, \psi_t$$

mit dem H_0 aus Aufgabe 2. Zeigen Sie: Die Erwartungswerte $\langle p \rangle_t$ und $\langle p^2 \rangle_t$ sind zeitunabhängig, es gilt

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_t \quad &:= \quad \langle \psi_t,\, p\, \psi_t \rangle \quad = \quad \hbar k_0 \\ \langle p^2 \rangle_t \quad &:= \quad \langle \psi_t,\, p^2\, \psi_t \rangle \quad = \quad \hbar^2 k_0^2 \;+\; \hbar^2\, \tfrac{1}{4\ell^2} \end{aligned}$$

Benutzen Sie dazu die Relation

$$\langle \psi_t,\, A\, \psi_t \rangle \quad = \quad \langle F\psi_t,\, FA\, \psi_t \rangle \quad = \quad \langle F\psi_t,\, FAF^{-1}F\, \psi_t \rangle \quad = \quad \langle \hat{\psi}_t,\, \hat{A}\, \hat{\psi}_t \rangle \tag{1}$$

für beliebige Operatoren A. (Sie können auch direkt im Ortsraum rechnen, also mit der linken Seite von Gleichung (1), die Rechnung wird dann etwas aufwändiger.)