Hochschule RheinMain WS 2022/23
Prof. Dr. D. Lehmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1: Für ein festes $k_0 \in \mathbb{R}$ sei die Wellenfunktion $\psi = \psi_{k_0}(x)$ gegeben durch

$$\psi(x) \;:=\; \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/4}}\, e^{-\frac{x^2}{4\ell^2}}\, e^{i\,k_0 x} \tag{1}$$

Weiterhin definieren wir für Operatoren $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ bei gegebenem ψ einen Erwartungswert $\langle A\rangle$ und eine Standardabweichung σ_A durch

$$\langle A\rangle \;:=\; \langle \psi, A\psi\rangle \;=\; \textstyle\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)\,(A\psi)(x)\,dx \tag{2}$$

$$\sigma_A \;:=\; \sqrt{\langle\, \psi\,,\, [\,A - \langle A\rangle\,]^2\,\psi\,\rangle} \;=\; \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} \tag{3}$$

Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) Der Zustand ψ ist normiert,

$$\|\psi\|^2 \;=\; \langle\psi,\psi\rangle \;=\; \textstyle\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\,dx \;=\; 1 \tag{4}$$

b) Es gelten die folgenden Erwartungswerte,

$$\langle\hat{x}\rangle \;=\; 0 \tag{5}$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle \;=\; \ell^2 \tag{6}$$

$$\langle\hat{p}\rangle \;=\; \hbar k_0 \tag{7}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle \;=\; \hbar^2 k_0^2 + \tfrac{\hbar^2}{4\ell^2} \tag{8}$$

c) Für die Standardabweichungen von Ort und Impuls gelten die folgenden Beziehungen:

$$\sigma_{\hat{x}} \;=\; \ell \tag{9}$$

$$\sigma_{\hat{p}} \;=\; \tfrac{\hbar}{2\ell} \tag{10}$$

$$\sigma_{\hat{x}}\,\sigma_{\hat{p}} \;=\; \tfrac{\hbar}{2}\;. \tag{11}$$

Aufgabe 2 (Unschärferelation): Es seien $A, B : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ zwei selbstadjungierte Operatoren und für eine Wellenfunktion[1] $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ seien der Erwartungswert und die Standardabweichung von A und B definiert wie in (2) und (3) von Aufgabe 1, das Integral dann über den $\mathbb{R}^3$.

..bitte wenden

[1] genau genommen müssten wir schreiben $A : D_A \subset L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ mit geeigneten Definitionsbereichen D_A und D_B und das ψ dann also aus D_A oder D_B

a) Der Kommutator $[A, B]$ von A und B ist definiert durch

$$[A, B] \;:=\; AB - BA \tag{12}$$

Zeigen Sie: Sind A und B selbstadjungiert, dann ist auch die Kombination $i[A, B]$ ein selbstadjungierter Operator. Insbesondere gilt:

$$\langle\, i[A, B]\,\rangle \;\in\; \mathbb{R} \tag{13}$$

b) Beweisen Sie jetzt die Unschärferelation

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \;\geq\; \tfrac{|\langle\, i[A,B]\,\rangle|}{2} \tag{14}$$

Betrachten Sie dazu für reelles λ die Grösse

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; I(\lambda) \quad &:= \quad \big\|\, \big[\, \lambda(A - \langle A\rangle) \;-\; i\,(B - \langle B\rangle)\,\big]\,\psi\, \big\|^2 \\ &\overset{\text{zu zeigen}}{=} \quad \lambda^2\,\sigma_A^2 \;+\; \sigma_B^2 \;-\; \lambda\,\langle\, i[A, B]\,\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

und zeigen Sie, dass das Minimum von $I(\lambda)$ durch

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} I(\lambda) \;=\; \sigma_B^2 \;-\; \tfrac{\langle\, i[A,B]\,\rangle^2}{4\sigma_A^2} \;\geq\; 0 \tag{16}$$

gegeben ist.

c) Folgern Sie noch: Für die j-ten Koordinaten $\hat{x}_j$ und $\hat{p}_j = -i\hbar\,\partial/\partial x_j$ des Orts- und Impulsoperators gilt für beliebiges ψ die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\sigma_{\hat{x}_j} \cdot \sigma_{\hat{p}_j} \;\geq\; \tfrac{\hbar}{2}\;. \tag{17}$$