Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

4. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1: Es seien D_+ und D_- die diskretisierten Vorwärts- und Rückwärts-Ableitungen aus der Vorlesung gegeben durch $D_+, D_- : \mathbb{C}^{2N+1} \to \mathbb{C}^{2N+1}$,

$$(D_+f)_m \;:=\; \tfrac{f_{m+1}-f_m}{\Delta x}\,, \qquad (D_-f)_m \;:=\; \tfrac{f_m-f_{m-1}}{\Delta x}$$

mit $f = (f_{-N}, \cdots, f_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$, $m \in \{-N, \cdots, +N\}$ und den Identifikationen

$$\begin{aligned} f_{N+1} &:= f_{-N} \\ f_{-N-1} &:= f_{+N} \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es gilt die Gleichung

$$D_+D_- \;=\; D_-D_+$$

und die Wirkung von D_+D_- auf ein $f \in \mathbb{C}^{2N+1}$ ist gegeben durch

$$(D_+D_-f)_m \;=\; \tfrac{f_{m+1}+f_{m-1}-2f_m}{(\Delta x)^2}\;.$$

Aufgabe 2: Es sei $N \in \mathbb{N}$ und j und ℓ seien ganze Zahlen zwischen $-N$ und $+N$, also $-N \leq j, \ell \leq +N$. Beweisen Sie:

$$\sum_{m=-N}^{N} e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)m}{2N+1}} \;=\; (2N+1) \times \delta_{j,\ell}$$

Was ändert sich, wenn man die Einschränkung $-N \leq j, \ell \leq +N$ weglässt, also nur $j, \ell \in \mathbb{Z}$ voraussetzt?

Aufgabe 3: Es sei $F \in \mathbb{C}^{(2N+1)\times(2N+1)}$ die Matrix der diskreten Fouriertransformation gegeben durch $F = (F_{j,\ell})_{-N\leq j,\ell\leq +N}$ mit

$$F_{j,\ell} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2N+1}}\; e^{i\,2\pi\,\frac{j\ell}{2N+1}}$$

Berechnen Sie die Matrizen F^2 und F^4 und vereinfachen Sie Ihr Resultat soweit wie möglich.

..bitte wenden

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(k) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\,i\,kx}\; f(x)\; \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

der Funktion

$$f(x) \quad := \quad x\; e^{-\,\frac{x^2}{2}}$$

Schreiben Sie dazu etwa $x\,e^{\,i\,kx} \;=\; -\,i\,\frac{d}{dk}\,e^{\,i\,kx}$ und benutzen Sie die Resultate aus der Vorlesung.

Bemerkung: In den Aufgaben 1-3 hätten wir anstatt des $\mathbb{C}^{2N+1}$ auch überall ein $\mathbb{C}^N$ nehmen können; das $\mathbb{C}^{2N+1}$ kam durch die Art und Weise zustande, wie wir das Ortsraum-Intervall $x \in [-L, +L]$ diskretisiert hatten.