Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

3. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1 (Kontinuitätsgleichung): Die Funktion $\psi = \psi(\vec{x}, t)$ sei eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x}) \right\} \psi \tag{1}$$

mit einem reellen Potential $V = V(\vec{x}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ und den Wahrscheinlichkeitsstrom $\vec{j}$ durch

$$\rho(\vec{x}, t) := |\psi(\vec{x}, t)|^2 \tag{2}$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) := \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}[\bar{\psi}\, \nabla\psi] = \frac{\hbar}{2mi} \left(\bar{\psi}\, \nabla\psi - \psi\, \nabla\bar{\psi} \right) \tag{3}$$

Dabei haben wir der Übersichtlichkeit halber auf der rechten Seite von (3) die Argumente $(\vec{x}, t)$ an den ψ's weggelassen. Zeigen Sie: Ist ψ Lösung von (1), dann genügen ρ und $\vec{j}$ der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x}, t) + \mathrm{div}\, \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \ . \tag{4}$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x}) := A\, e^{+i\vec{k}\vec{x}} + B\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} \tag{5}$$

mit komplexen Konstanten $A, B \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der zugehörige Wahrscheinlichkeitsstrom (wir wollen hier keine zeitlichen Abhängigkeiten betrachten)

$$\vec{j}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}[\bar{\psi}\, \nabla\psi](\vec{x}) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\bar{\psi}\, \nabla\psi - \psi\, \nabla\bar{\psi} \right)(\vec{x})$$

durch die folgende Formel gegeben ist:

$$\vec{j}(\vec{x}) = \frac{\hbar\vec{k}}{m} (|A|^2 - |B|^2) = \frac{\vec{p}}{m} (|A|^2 - |B|^2) \tag{6}$$

mit dem Impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Das $\vec{j}$ ist also konstant, unabhängig von $\vec{x}$, und hat die intuitive Bedeutung eines Teilchenstroms mit der klassischen Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{p}/m$.

Aufgabe 3: Wir betrachten den folgenden Anfangszustand zur Zeit $t = 0$,

$$\psi_0(\vec{x}) = \psi(\vec{x}, 0) := A_1\, e^{+i\vec{k}_1\vec{x}} + A_2\, e^{+i\vec{k}_2\vec{x}} \tag{7}$$

..bitte wenden

Die Zeitevolution $\psi(\vec{x},t)$ von ψ_0 sei gegeben durch die freie (d.h. $V(\vec{x}) = 0$) zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi \;\;=\;\; -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\,\psi \tag{8}$$

Zeigen Sie:

a) Das $\psi(\vec{x},t)$ lässt sich schreiben als

$$\psi(\vec{x},t) \;\;=\;\; A_1\,e^{+\,i\,[\,\vec{k}_1\vec{x}-\omega_1 t\,]} \;+\; A_2\,e^{+\,i\,[\,\vec{k}_2\vec{x}-\omega_2 t\,]} \tag{9}$$

mit geeigneten ω_1 und ω_2. Geben Sie die ω_i als Funktion der $\vec{k}_i$ an.

b) Der Wahrscheinlichkeitsstrom (3), der zu dem Zustand (9) gehört, ist gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{x},t) \;\;=\;\; \frac{\hbar\vec{k}_1}{m}\,|A_1|^2 \;+\; \frac{\hbar\vec{k}_2}{m}\,|A_2|^2 \;+\; \frac{\hbar(\vec{k}_1+\vec{k}_2)}{m}\,\mathrm{Re}\big[A_1\bar{A}_2\,e^{+\,i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\big] \tag{10}$$

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(\vec{x},t)|^2$ an und zeigen Sie dann durch explizite Rechnung, dass die Kontinuitätsgleichung (4) erfüllt ist.

d) Für die beiden Spezialfälle

$$\vec{k}_2 \;\;=\;\; \pm\,\vec{k}_1 \tag{11}$$

reduziert sich das $\vec{j}$ aus (10) wieder auf einen konstanten, von Raum und Zeit unabhängigen Wert, geben Sie diesen Wert jeweils an.