

2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1 (relativistische Energie-Impuls Beziehung): Die relativistische Energie E und der relativistische Impuls \vec{p} eines freien Teilchens mit Geschwindigkeit \vec{v} sind gegeben durch

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

mit $v = \|\vec{v}\|$ und c die Lichtgeschwindigkeit. Zeigen Sie:

- a) Aus den Gleichungen für E und \vec{p} folgt die relativistische Energie-Impuls Beziehung

$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2c^2$$

mit $p = \|\vec{p}\|$.

- b) Für Photonen, die haben Masse $m = 0$, folgt aus (a) die Gleichung

$$E = pc$$

Zeigen Sie, dass man diese Gleichung ebenfalls aus der Planck-Einstein und der de Broglie Beziehung herleiten kann.

- c) Schreiben wir etwas expliziter

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

dann wird die Größe $E(0) = mc^2$ als die Ruhemasse bezeichnet und die kinetische Energie ist

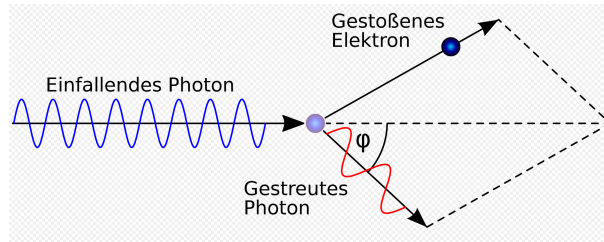
$$E_{\text{kin}} := E(v) - E(0)$$

Zeigen Sie: Für kleine $v \ll c$ gilt

$$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} + O\left(\frac{mv^4}{c^2}\right).$$

..bitte wenden

Aufgabe 2 (Compton-Effekt): Photonen lassen sich an Elektronen streuen gemäss dem folgendem Schema:



Dabei überträgt das einfallende Photon einen Teil seines Impulses auf das ruhende (das nehmen wir der Einfachheit halber an) Elektron und verringert dadurch seine Energie. Nach der Planck-Einstein Relation ist damit eine Vergrößerung der Wellenlänge

$$\Delta\lambda := \lambda_{\text{gestreutes Photon}} - \lambda_{\text{einfallendes Photon}} > 0$$

verbunden.

a) Zeigen Sie, dass das $\Delta\lambda$ durch die folgende Formel gegeben ist:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$$

mit m_e die Masse des Elektrons und φ der Streuwinkel wie in der Abbildung. Benutzen Sie dazu die Erhaltung der relativistischen Energien und Impulse, d.h. die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} E_{\text{ph}} + E_e &= E'_{\text{ph}} + E'_e \\ \vec{p}_{\text{ph}} + \vec{p}_e &= \vec{p}'_{\text{ph}} + \vec{p}'_e \end{aligned}$$

Dabei seien die ungestrichenen Größen die Größen vor dem Streuprozess und die gestrichenen Größen die Größen nach dem Streuprozess, das $\Delta\lambda$ wäre also $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ in dieser Notation. Da wir annehmen, dass sich das Elektron vor dem Streuprozess in Ruhe befindet, gilt

$$\begin{aligned} \vec{p}_e &= \vec{0} \\ E_e &= m_e c^2 \end{aligned}$$

b) Die Größe

$$\lambda_{\text{Compton}} := \frac{h}{m_e c}$$

heißt die Compton-Wellenlänge des Elektrons. Geben Sie den konkreten numerischen Wert an. Wenn Sie elektromagnetische Strahlung mit derselben Wellenlänge benennen sollten, um welche Art von elektromagnetischer Strahlung (also etwa Licht oder Wärmestrahlung oder Radiowellen..) würde es sich dabei handeln? Informieren Sie sich dazu gegebenenfalls im Internet über das elektromagnetische Spektrum.