Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

14. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

(nicht mehr klausurrelevant)

1.Aufgabe: Wir benötigen die Aussage vom Teil (c) dieser Aufgabe: Gegeben seien die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+ und a wie üblich durch

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\, \xi + \tfrac{d}{d\xi}\,\big) \\ a^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\, \xi - \tfrac{d}{d\xi}\,\big) \end{aligned}$$

Wir haben den Kommutator

$$[a, a^+] \;=\; 1$$

und mit der einfachen Version der Baker-Campbell-Hausdorff Formel aus der 2. Aufgabe vom Üblatt 13 oder aus dem Theorem 6.2.2 aus dem week12a.pdf gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda(a^+ + a)} \;=\; e^{\frac{\lambda^2}{2}}\, e^{\lambda a^+}\, e^{\lambda a} \tag{1}$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite von (1) nach Potenzen von λ entwickeln und dann die Koeffizienten von λ^m vergleichen, erhalten wir die folgende Formel:

$$(a^+ + a)^m \;=\; \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{m-2k} \frac{(a^+)^{m-2k-j}\, a^j}{(m-2k-j)!\, j!} \tag{2}$$

Der Nutzen dieser Formel besteht darin, dass auf der rechten Seite von (2) die a^+ immer links von den a's stehen.

a) Überprüfen Sie die Formel für den Fall $m = 2$, indem Sie die linke und die rechte Seite von (2) explizit ausschreiben.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von (2): Es gilt die Formel

$$\begin{aligned} (a^+ + a)^4 \;=\; & (a^+)^4 \;+\; 4(a^+)^3 a \;+\; 6(a^+)^2 a^2 \;+\; 4a^+ a^3 \;+\; a^4 \\ & + 6(a^+)^2 \;+\; 12 a^+ a \;+\; 6a^2 \;+\; 3 \;. \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie jetzt mit Hilfe von Teil (b) die Aussage von Lemma 7.2.1 aus dem week13a.pdf, das ist die folgende Formel:

$$(a^+ + a)^4 \;=\; (a^+)^4 \;+\; (a^+)^2\,(4\hat n + 6) \;+\; a^2\,(4\hat n - 2) \;+\; a^4 \;+\; 6\,\hat n\,(\hat n + 1) \;+\; 3$$

mit $\hat n := a^+ a$.