13. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

1.Aufgabe: Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebige komplexe $n \times n$ Matrizen. Wir definieren die lineare Abbildung

$$L_A \;:\; \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$$

durch

$$L_A(B) \;:=\; [A,B] \;=\; AB - BA \;.$$

Beweisen Sie: Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{tA}\, B\, e^{-tA} \;=\; e^{tL_A}\, B \tag{1}$$

Zeigen Sie dazu, dass die Matrix $M_t := e^{tA}\, B\, e^{-tA}$, das ist die linke Seite von (1), die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt} M_t \;=\; L_A\, M_t$$

erfüllt. Da die linke und die rechte Seite von (1) bei Zeit $t = 0$ übereinstimmen, folgt daraus dann die Gleichheit für alle t.

2.Aufgabe: Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebige komplexe $n \times n$ Matrizen und es gelte

$$\big[\, A\, ,\, [A,B] \big] \;=\; \big[\, B\, ,\, [A,B] \big] \;=\; 0 \tag{2}$$

Beweisen Sie die einfache Version der Baker-Campbell-Hausdorff Formel: Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{t(A+B)} \;=\; e^{tA}\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \tag{3}$$

Zeigen Sie dazu, dass die Matrix $M_t := e^{tA}\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$, das ist die rechte Seite von (3), die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt} M_t \;=\; (A+B)\, M_t \tag{4}$$

erfüllt. Da die linke und die rechte Seite von (3) bei Zeit $t = 0$ übereinstimmen, folgt daraus dann die Gleichheit für alle t. Zum Beweis von (4) benötigen Sie die Formel (1) aus Aufgabe 1 und Sie müssen beim Evaluieren von $e^{tL_A} B$ oder analogen Ausdrücken die Annahmen (2) verwenden.

..bitte wenden

3.Aufgabe: Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass für diese Matrizen die Voraussetzungen (2) aus Aufgabe 2 erfüllt sind, und überprüfen Sie dann für diese Matrizen die Formel (3), indem Sie die linke und die rechte Seite von (3) explizit berechnen.