Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

12. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1: Für den radialen Anteil $u_\ell(r)$ der Wellenfunktion für das Wasserstoff-Atom

$$\psi \;=\; \psi(r,\varphi,\theta) \;=\; \frac{u_\ell(r)}{r}\, Y_{\ell m}(\varphi,\theta) \tag{1}$$

hatten wir die dimensionslosen Grössen

$$\rho \;:=\; \tfrac{r}{r_B}\,, \qquad \varepsilon \;:=\; \tfrac{E}{E_{Ry}}$$

eingeführt mit

$$r_B \;=\; \tfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\,, \qquad E_{Ry} \;=\; \tfrac{\hbar^2}{2mr_B^2}$$

und waren dann mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} u_\ell(r) &= v_\ell(x)\, x^{\ell+1}\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad (2)\\ x &= 2\,\gamma\,\rho \\ \gamma^2 &= -\varepsilon \;>\; 0 \end{aligned}$$

auf die folgende Differentialgleichung für das $v = v_\ell(x)$ gekommen:

$$x\,v'' \;+\; (2\ell+2-x)\,v' \;+\; \big(\tfrac{1}{\gamma}-\ell-1\big)\,v \;=\; 0 \tag{3}$$

In der Vorlesung hatten wir dann (3) mit der Formel von Rodrigues gelöst und waren auf die Darstellung

$$\begin{aligned} v(x) \;=\; n!\,L_n^{(2\ell+1)}(x) &= \frac{e^{+x}}{x^{2\ell+1}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \big\{\,x^{2\ell+1+n}\,e^{-x}\,\big\} \\ &= n!\,\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2\ell+1}{n-k}\,\frac{(-x)^k}{k!} \qquad (4) \end{aligned}$$

gekommen mit den verallgemeinerten Laguerre-Polynomen $L_n^{(2\ell+1)}$ und der Bedingung

$$\lambda \;=\; \lambda_n \;:=\; \tfrac{1}{\gamma}-\ell-1 \;\stackrel{!}{=}\; n\,, \qquad n \,\in\, \{0,1,2,\cdots\} \tag{5}$$

In dieser Aufgabe wollen wir die DGL (3) mit einem Potenzreihenansatz lösen und uns klarmachen, dass für nicht ganzzahliges λ die Lösungen nicht quadratintegrabel sind.

..bitte wenden

a) Machen Sie den Ansatz

$$v(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \tag{6}$$

und leiten Sie die Rekursion

$$a_{k+1} \;=\; \frac{k-\lambda}{(k+1)(k+2\ell+2)}\, a_k\,, \qquad k = 0,1,2,... \tag{7}$$

her.

b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_k, wenn wir sie durch die Lösung (4) definieren, also alles was da vor dem x^k steht, tatsächlich die Rekursion (7) erfüllen, mit $\lambda = \lambda_n = n$.

c) Zeigen Sie: Für die allgemeinen a_k gegeben durch (7) gilt für nicht ganzzahliges $\lambda \neq n$ im Limes $k \to \infty$

$$a_k \;\overset{k\to\infty}{\approx}\; \frac{c}{k!}$$

mit einer Konstanten c.

d) Folgern Sie aus Teil (c): Für nicht ganzzahliges $\lambda \neq n$ hat das $v(x)$ aus (6) die Darstellung

$$v(x) \;\approx\; \sum_{k=0}^{k_0} b_k\, x^k \;+\; c\, e^x \tag{8}$$

mit gewissen Koeffizienten b_k und einem hinreichend grossen $k_0 < \infty$ und führt damit zu einem nicht quadratintegrablen $u_\ell(r)$.

Aufgabe 2: Die dimensionslose zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator mit Potential

$$V(x) \;=\; \tfrac{m\omega^2}{2}\, x^2$$

lautet

$$\tfrac{1}{2}\Big\{-\tfrac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2\Big\}\,\psi \;=\; \varepsilon\,\psi \tag{9}$$

mit den dimensionslosen Grössen

$$\xi \;:=\; x/\ell\,, \qquad \varepsilon \;:=\; E/\hbar\omega$$

und der Länge

$$\ell \;:=\; \sqrt{\tfrac{\hbar}{m\omega}}$$

a) Machen Sie den Ansatz

$$\psi(\xi) \;=\; v(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

und zeigen Sie, dass das v der DGL

$$v'' \,-\, 2\xi\, v' \,+\, (2\varepsilon - 1)\, v \;=\; 0 \tag{10}$$

genügen muss.

b) Bestimmen Sie dann die Eigenwerte $\varepsilon = \varepsilon_n$ und die polynomialen Eigenfunktionen $v = v_n$ von (10) mit der Formel von Rodrigues, das war das Theorem 5.3.3 aus dem week9.pdf.