10. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik

Aufgabe 1: Es seien P_ℓ, P_ℓ^m und $Y_{\ell m}$ die Legendre-Polynome, die zugeordneten Legendre-Polynome und die Kugelflächenfunktionen gegeben durch die Gleichungen (11), (13,14) und (16,18) in dem week10a.pdf.

a) Geben Sie P_0, P_1 und P_2 explizit an und verifizieren Sie das Skalarprodukt $(P_0, P_2) = 0$.

b) Geben Sie die P_0^0, P_1^m und P_2^m für alle möglichen m's explizit an und verifizieren Sie die Skalarprodukte $(P_0^0, P_2^m) = 0$.

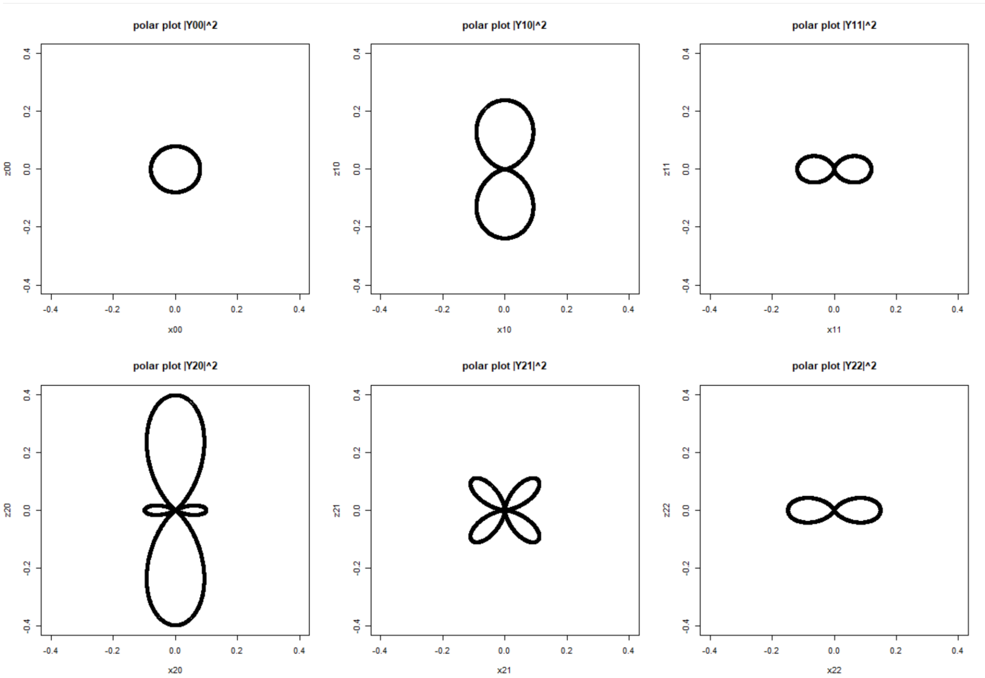
c) Geben Sie die Y_{00}, $Y_{1,m}$ und $Y_{2,m}$ für alle möglichen m's explizit an und verifizieren Sie die Skalarprodukte $(Y_{00}, Y_{2,m}) = 0$.

d) Geben Sie die Betragsquadrate $|Y_{00}|^2$, $|Y_{1,m}|^2$ und $|Y_{2,m}|^2$ für alle möglichen m's explizit an und verifizieren Sie die Identität

$$\sum_{m=-\ell}^{+\ell} |Y_{\ell m}(\varphi, \theta)|^2 \;=\; \frac{2\ell+1}{4\pi}$$

für $\ell \in \{0, 1, 2\}$.

e) Finden Sie heraus, was genau auf dem folgenden Bild angezeigt wird und versuchen Sie es mit einer geeigneten Software Ihrer Wahl zu reproduzieren:



..bitte wenden

Aufgabe 2: Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
r\,Y_{10} &= \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\, z \\
r\,Y_{1,\pm1} &= \sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\,(\mp x - iy) \\
r^2\,Y_{20} &= \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\,(2z^2 - x^2 - y^2) \\
r^2\,Y_{2,\pm1} &= \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\,(\mp x - iy)\,z \\
r^2\,Y_{2,\pm2} &= \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\,(x \pm iy)^2
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die Anwendung von Δ auf diese Funktionen 0 ergibt, es sind harmonische homogene Polynome vom Grad 0, 1 und 2.

Aufgabe 3: Die folgende Argumentation führt zu einem offensichtlichen Widerspruch in Gleichung (4) unten, wo genau liegt der Fehler?

Im Theorem 5.3.2 im week9.pdf hatten wir gezeigt, dass die Legendre-Polynome $\{P_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ eine vollständige Orthogonalbasis vom $L^2\big([-1,+1]\big)$ sind, jede quadratintegrable Funktion kann nach den P_ℓ entwickelt werden. Die P_ℓ waren Lösungen der Legendre-DGL

$$(1-x^2)\,P_\ell'' \;-\; 2x\,P_\ell' \;+\; \lambda_\ell\,P_\ell \;=\; \Big\{\tfrac{d}{dx}(1-x^2)\tfrac{d}{dx} \;+\; \lambda_\ell\Big\}\,P_\ell \;=\; 0 \tag{1}$$

zum Eigenwert $\lambda_\ell = \ell(\ell+1)$. Als lineare DGL 2. Ordnung besitzt (1) neben den P_ℓ noch eine zweite, linear unabhängige Lösung, für $\ell = 0$ ist das etwa die Funktion

$$Q_0(x) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\log\big[\,\tfrac{1+x}{1-x}\,\big] \tag{2}$$

Dieses $Q_0(x)$ hat Singularitäten bei $x = \pm1$, ist aber trotzdem quadratintegrabel auf $[-1,+1]$, also $Q_0 \in L^2\big([-1,+1]\big)$, und wir können es nach den P_ℓ entwickeln,

$$Q_0(x) \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} \tfrac{2\ell+1}{2}\,(Q_0, P_\ell)\,P_\ell(x) \tag{3}$$

Nun ist Q_0 Lösung der Legendre-DGL (1) zum Eigenwert 0 und Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander, also gilt $(Q_0, P_\ell) = 0$ für alle $\ell \geq 1$. Dann folgt aber aus (3)

$$Q_0(x) \;=\; \tfrac{2\cdot0+1}{2}\,(Q_0, P_0)\,P_0(x) \;\overset{P_0(x)=1}{=}\; \tfrac{1}{2}\,(Q_0, P_0) \quad \text{unabhängig von } x \tag{4}$$

im Widerspruch zu Gleichung (2). Wo genau liegt der Fehler?