Lösungen 7. Übungsblatt Quantenmechanik

Aufgabe 1: a) Wir bekommen

$$\begin{aligned} 1+R &= A+B && (1)\\ ik(1-R) &= \kappa(A-B) && (2)\end{aligned}$$

Die Kombinationen $\kappa(1)+(2)$ und $\kappa(1)-(2)$ liefern

$$2\kappa A = \kappa(1+R) + ik(1-R) = R(\kappa-ik) + \kappa+ik \qquad (3)$$

$$2\kappa B = \kappa(1+R) - ik(1-R) = R(\kappa+ik) + \kappa-ik \qquad (4)$$

b) Wir bekommen

$$\begin{aligned} A\,e^{+\kappa L} + B\,e^{-\kappa L} &= T\,e^{+ikL} && (5)\\ \kappa A\,e^{+\kappa L} - \kappa B\,e^{-\kappa L} &= ikT\,e^{+ikL} && (6)\end{aligned}$$

Die Kombinationen $-ik(5)+(6)$ und $\kappa(5)+(6)$ liefern

$$\begin{aligned} (\kappa-ik)A\,e^{+\kappa L} - (\kappa+ik)B\,e^{-\kappa L} &= 0 && (7)\\ 2\kappa Ae^{+\kappa L} &= (\kappa+ik)Te^{+ikL} && (8)\end{aligned}$$

c) Wir multiplizieren (7) mit 2κ,

$$(\kappa-ik)2\kappa A\,e^{+\kappa L} - (\kappa+ik)2\kappa B\,e^{-\kappa L} = 0$$

und setzen die Gleichungen (3) und (4) ein. Mit $q_0^2 := k^2+\kappa^2 = 2mV_0/\hbar^2$ bekommen wir dann

$$\begin{aligned} (\kappa-ik)\big[R(\kappa-ik) + \kappa+ik\big]e^{+\kappa L} - (\kappa+ik)\big[R(\kappa+ik)+\kappa-ik\big]e^{-\kappa L} &= 0\\ \Leftrightarrow \quad \big[R(\kappa-ik)^2 + q_0^2\big]e^{+\kappa L} - \big[R(\kappa+ik)^2+q_0^2\big]e^{-\kappa L} &= 0\\ \Leftrightarrow \quad R\big[(\kappa-ik)^2e^{+\kappa L} - (\kappa+ik)^2e^{-\kappa L}\big] + q_0^2(e^{+\kappa L}-e^{-\kappa L}) &= 0\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R &= \frac{-q_0^2\,(e^{+\kappa L}-e^{-\kappa L})}{(\kappa-ik)^2e^{+\kappa L} - (\kappa+ik)^2e^{-\kappa L}}\\ &= \frac{-q_0^2\,(e^{+\kappa L}-e^{-\kappa L})}{(-i)^2(i\kappa+k)^2e^{+\kappa L} - (+i)^2(-i\kappa+k)^2e^{-\kappa L}}\\ &= \frac{q_0^2\,(e^{+\kappa L}-e^{-\kappa L})}{(k+i\kappa)^2e^{+\kappa L} - (k-i\kappa)^2e^{-\kappa L}}\\ &= \frac{e^{\kappa L}-e^{-\kappa L}}{e^{\kappa L+i2\theta} - e^{-(\kappa L+i2\theta)}} = \frac{\sinh(\kappa L)}{\sinh(\kappa L+2i\theta)} && (9)\end{aligned}$$

d) Wir setzen Gleichung (3) in Gleichung (8) ein und bekommen

$$\begin{aligned} R(\kappa - ik) \,+\, \kappa + ik &= (\kappa + ik) T e^{+ikL - \kappa L} \\ \Leftrightarrow \qquad T e^{+ikL-\kappa L} &= 1 \,+\, R\,\frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} \;=\; 1 \,-\, R\,\frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} T e^{+ikL-\kappa L} &= 1 \,-\, e^{+i\,2\theta} R \\ &= 1 \,-\, e^{+i\,2\theta}\,\frac{e^{\kappa L} - e^{-\kappa L}}{e^{\kappa L + i2\theta} \,-\, e^{-(\kappa L + i2\theta)}} \\ &= \frac{e^{\kappa L + i2\theta} \,-\, e^{-(\kappa L + i2\theta)} \,-\, e^{\kappa L + i2\theta} + e^{-\kappa L + i2\theta}}{e^{\kappa L + i2\theta} \,-\, e^{-(\kappa L + i2\theta)}} \\ &= \frac{-\,e^{-(\kappa L + i2\theta)} \,+\, e^{-\kappa L + i2\theta}}{e^{\kappa L + i2\theta} \,-\, e^{-(\kappa L + i2\theta)}} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} T &= e^{-\,i\,kL}\,\frac{-\,e^{-i2\theta} \,+\, e^{+i2\theta}}{e^{\kappa L + i2\theta} \,-\, e^{-(\kappa L + i2\theta)}} \\ &= e^{-\,i\,kL}\,\frac{i\,\sin(2\theta)}{\sinh(\kappa L + i2\theta)} \end{aligned}$$

e) Mit

$$\begin{aligned} |\sinh(x+iy)|^2 &= \big|\,\sinh(x)\cosh(iy) \,+\, \sinh(iy)\cosh(x)\,\big|^2 \\ &= \big|\,\sinh(x)\cos(y) \,+\, i\sin(y)\cosh(x)\,\big|^2 \\ &= \sinh^2(x)\cos^2(y) \,+\, \sin^2(y)\cosh^2(x) \\ &= \sinh^2(x) \,-\, \sinh^2(x)\sin^2(y) \,+\, \sin^2(y)\cosh^2(x) \\ &= \sinh^2(x) \,+\, \sin^2(y) \end{aligned} \tag{10}$$

bekommen wir

$$|R|^2 \,+\, |T|^2 \;=\; \frac{\sinh^2(\kappa L)}{\sinh^2(\kappa L) \,+\, \sin^2(2\theta)} \,+\, \frac{\sin^2(2\theta)}{\sinh^2(\kappa L) \,+\, \sin^2(2\theta)} \;=\; 1$$

und

$$|T|^2 \;=\; \frac{\sin^2(2\theta)}{\sinh^2(\kappa L) \,+\, \sin^2(2\theta)} \;=\; \frac{1}{1 \,+\, \frac{1}{\sin^2(2\theta)}\,\sinh^2(\kappa L)}$$

mit

$$\frac{1}{\sin^2(2\theta)} \;=\; \frac{1}{4\sin^2\theta\cos^2\theta} \;=\; \frac{1}{4\,\frac{V_0 - E}{V_0}\,\frac{E}{V_0}} \;=\; \frac{V_0^2}{4\,(V_0 - E)\,E}$$

Damit ist alles gezeigt.