Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 6. Übungsblatt Quantenmechanik

Aufgabe 1: a) Wir bekommen

$$\begin{aligned} \ell_t^2 &= \ell_0^2 + \left(\tfrac{\omega''_{k_0} t}{2\ell_0}\right)^2 \stackrel{!}{=} (2\ell_0)^2 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{(\omega''_{k_0} t)^2}{4\ell_0^2} &= 3\ell_0^2 \\ \Leftrightarrow \quad (\omega''_{k_0} t)^2 &= 12\ell_0^4 \\ \Leftrightarrow \quad \omega''_{k_0} t &= 2\sqrt{3}\,\ell_0^2 \\ \Leftrightarrow \quad t &= 2\sqrt{3}\,\frac{\ell_0^2}{\omega''_{k_0}} \\ \stackrel{\omega''_{k_0} = \hbar/m}{\Leftrightarrow} \quad t_{2\ell} = t &= 2\sqrt{3}\,\frac{m\,\ell_0^2}{\hbar} \end{aligned}$$

b) Für ein Sandkorn mit den angegebenen Parameterwerten erhalten wir

$$\begin{aligned} t_{2\ell} &= 2\sqrt{3}\,\frac{m\,\ell_0^2}{\hbar} \\ &= 2\sqrt{3}\,\frac{2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{g}\;\frac{1}{4}\,10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{1.05\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} \\ &\approx \sqrt{3}\;10^{+24}\,\frac{\mathrm{g\,m}^2}{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}} \\ &= \sqrt{3}\;10^{+21}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Mit

$$1\,\mathrm{Jahr} = 365.25\times 24\times 60\times 60\,\mathrm{s} = 31'557'600\,\mathrm{s} \approx 3.2\cdot 10^7\,\mathrm{s}$$

sind das dann

$$\begin{aligned} t_{2\ell} &\approx \sqrt{3}\,\frac{10^{+21}\,\mathrm{s}}{3.2\cdot 10^7\,\mathrm{s}}\;\mathrm{Jahre} \\ &\approx 5.4\cdot 10^{+13}\;\mathrm{Jahre}\;. \end{aligned}$$

c) Für ein Elektron dessen Wellenfunktion auf die Ausdehnung eines H-Atoms lokalisiert wurde, ergibt sich (c die Lichtgeschwindigkeit)

$$
\begin{aligned}
t_{2\ell} &= 2\sqrt{3}\,\frac{m\,\ell_0^2}{\hbar} \;=\; 2\sqrt{3}\,\frac{mc^2\,\ell_0^2}{\hbar c^2} \\
&= 2\sqrt{3}\,\frac{511\,\mathrm{keV}\times 10^{-20}\,\mathrm{m}^2}{1.05\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\times 9\cdot 10^{16}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} \\
&\approx \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{10^6\,\mathrm{eV}\times 10^{-20}}{10^{-34}\,\mathrm{J}\times 10^{16}}\;\mathrm{s} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{10^4\,\mathrm{eV}}{1\,\mathrm{J}}\;\mathrm{s} \\
&\approx \frac{\sqrt{3}}{9}\,10^4\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\;\mathrm{s} \\
&\approx 0.3\cdot 10^{-15}\;\mathrm{s} \;=\; 3\cdot 10^{-16}\;\mathrm{s}\;.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: a) Wir haben

$$
\begin{aligned}
\langle Ff, Fg\rangle &= \langle \hat f, \hat g\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat f(k)}\;\hat g(k)\;dk \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-ikx}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}}}\;\hat g(k)\;dk \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,e^{+ikx}\;\hat g(k)\;\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}}\;dk \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\;\int_{\mathbb{R}} e^{+ikx}\;\hat g(k)\;\tfrac{dk}{\sqrt{2\pi}}\;dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,g(x)\;dx \;=\; \langle f, g\rangle
\end{aligned}
$$

b) Mit $\hat f = Ff$ bekommen wir

$$
\begin{aligned}
(\hat H_0 \hat f)(k) &= \big(\,F\,H_0\,F^{-1}Ff\,\big)(k) \\
&= \big(\,F\,H_0\,f\,\big)(k) \\
&= -\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\big(\,F\,\tfrac{d^2}{dx^2}\,f\,\big)(k) \\
&= -\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\int_{\mathbb{R}} \tfrac{d^2 f}{dx^2}(x)\,e^{-ikx}\;\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= +\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\int_{\mathbb{R}} \tfrac{df}{dx}(x)\;\tfrac{d}{dx}\;e^{-ikx}\;\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= -\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\int_{\mathbb{R}} f(x)\;\tfrac{d^2}{dx^2}\;e^{-ikx}\;\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= -\tfrac{\hbar^2}{2m}\,\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(-ik)^2\,e^{-ikx}\;\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \;=\; +\tfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\,\hat f(k)
\end{aligned}
$$

und in derselben Weise

$$
\begin{aligned}
(\hat{p}\hat{f})(k) &= \big(F\, p\, F^{-1} F f \big)(k) \\
&= \big(F\, p\, f \big)(k) \\
&= +\tfrac{\hbar}{i} \big(F\, \tfrac{d}{dx}\, f \big)(k) \\
&= +\tfrac{\hbar}{i} \int_{\mathbb{R}} \tfrac{df}{dx}(x)\, e^{-ikx}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= -\tfrac{\hbar}{i} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \tfrac{d}{dx}\, e^{-ikx}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= -\tfrac{\hbar}{i} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, (-ik)\, e^{-ikx}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad +\hbar k\, \hat{f}(k) \quad .
\end{aligned}
$$

c) Es gilt für beliebige Operatoren A

$$
F A^n F^{-1} \;=\; (F A F^{-1})^n
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
F e^A F^{-1} &= F \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} F^{-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F A^n F^{-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(F A F^{-1})^n}{n!} \\
&= e^{F A F^{-1}}
\end{aligned}
$$

Mit

$$
(\hat{H}_0 \hat{f})(k) \;=\; \tfrac{\hbar^2 k^2}{2m}\, \hat{f}(k)
$$

folgt dann

$$
(\hat{H}_0^n \hat{f})(k) \;=\; \big(\tfrac{\hbar^2 k^2}{2m} \big)^n\, \hat{f}(k)
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
(e^{\lambda \hat{H}_0} \hat{f})(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, (\hat{H}_0^n \hat{f})(k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^n \hat{f}(k) \\
&= e^{\lambda\, \frac{\hbar k^2}{2m}}\, \hat{f}(k) \quad .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Wir haben

$$\hat{\psi}_0(k) \;=\; \sqrt[4]{\frac{2\ell^2}{\pi}}\; e^{-\,\ell^2\,(k-k_0)^2}$$

$$\hat{\psi}_t(k) \;=\; \sqrt[4]{\frac{2\ell^2}{\pi}}\; e^{-\,i\,\omega_k\,t}\; e^{-\,\ell^2\,(k-k_0)^2}$$

$$|\hat{\psi}_t(k)|^2 \;=\; \sqrt{\frac{2\ell^2}{\pi}}\; e^{-\,2\ell^2\,(k-k_0)^2} \;=\; |\hat{\psi}_0(k)|^2$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \langle\hat{\psi}_t, \hat{p}\,\hat{\psi}_t\rangle \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \hbar k\,|\hat{\psi}_t(k)|^2\,dk \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} \Big\{\;\hbar k_0 \;+\; \hbar(k-k_0)\;\Big\}\,|\hat{\psi}_t(k)|^2\,dk \\ &=\; \hbar k_0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle\hat{\psi}_t, \hat{p}^2\,\hat{\psi}_t\rangle \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \hbar^2 k^2\,|\hat{\psi}_t(k)|^2\,dk \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} \Big\{\;\hbar^2 k_0^2 \;+\; 2\hbar^2 k_0(k-k_0) \;+\; \hbar^2(k-k_0)^2\;\Big\}\,|\hat{\psi}_t(k)|^2\,dk \\ &=\; \hbar^2 k_0^2 \;+\; 0 \;+\; \hbar^2\,\tfrac{1}{4\ell^2} \end{aligned}$$

und damit

$$\sigma_{\hat{p},t} \;=\; \frac{\hbar}{2\ell} \;=\; \sigma_{\hat{p},0}\;\;.$$

Die Rechnung im Ortsraum ist deutlich aufwändiger: Es war

$$\begin{aligned} \psi_t(x) \;&=\; \sqrt[4]{\frac{2\ell^2}{\pi}}\;\frac{1}{\sqrt{2\ell^2 \,+\, i\omega''_{k_0} t}} \;\times\; e^{\,i\,[\,k_0 x - \omega_{k_0} t\,]}\; e^{-\,\frac{1}{2\ell^2\,+\,i\omega''_{k_0}\,t}\,\frac{(x-\omega'_{k_0}\,t)^2}{2}} \\ &=:\; A_t \;\times\; e^{\,i\,[\,k_0 x - \omega_{k_0} t\,]}\; e^{-\,\frac{1}{2\ell^2\,+\,i\omega''_{k_0}\,t}\,\frac{(x-\omega'_{k_0}\,t)^2}{2}} \end{aligned}$$

$$|\psi_t(x)|^2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell_t^2}}\; e^{-\,\frac{(x-\omega'_{k_0}\,t)^2}{2\ell_t^2}}$$

mit

$$A_t \;:=\; \sqrt[4]{\frac{2\ell^2}{\pi}}\;\frac{1}{\sqrt{2\ell^2 \,+\, i\omega''_{k_0} t}}\;\;, \qquad |A_t|^2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell_t^2}}$$

Damit bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\hat{p}\psi_t(x) &= \tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x}\psi_t(x) \\
&= A_t \left\{ \hbar k_0 - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,(x-\omega'_{k_0}t) \right\} e^{i\,[\,k_0 x - \omega_{k_0} t\,]}\; e^{-\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,\frac{(x-\omega'_{k_0}t)^2}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{p}^2\psi_t(x) &= A_t \left\{ \hbar k_0 - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,(x-\omega'_{k_0}t) \right\}^2 e^{i\,[\,k_0 x - \omega_{k_0} t\,]}\; e^{-\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,\frac{(x-\omega'_{k_0}t)^2}{2}} \\
&\quad + A_t\,\frac{\hbar}{i}\Big(-\frac{\hbar}{i}\Big)\,\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\; e^{i\,[\,k_0 x - \omega_{k_0} t\,]}\; e^{-\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,\frac{(x-\omega'_{k_0}t)^2}{2}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\bar{\psi}_t(x)\hat{p}\psi_t(x) = \left\{ \hbar k_0 - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,(x-\omega'_{k_0}t) \right\} |\psi_t(x)|^2
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}_t(x)\hat{p}^2\psi_t(x) &= \left\{ \hbar k_0 - \frac{\hbar}{i}\frac{1}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,(x-\omega'_{k_0}t) \right\}^2 |\psi_t(x)|^2 \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}\,|\psi_t(x)|^2
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\langle \hat{p} \rangle_t = \hbar k_0
$$

und

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2 \rangle_t &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}_t(x)\hat{p}^2\psi_t(x)\,dx \\
&= (\hbar k_0)^2 - \frac{\hbar^2\,\ell_t^2}{[\,2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t\,]^2} + \frac{\hbar^2}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t}
\end{aligned}
$$

Es war

$$
\begin{aligned}
\ell_t^2 &= \frac{4\ell^4 + (\omega''_{k_0} t)^2}{4\ell^2} = \ell^2 + \Big(\frac{\omega''_{k_0} t}{2\ell}\Big)^2 \\
&= \frac{(2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t)(2\ell^2 - i\omega''_{k_0} t)}{4\ell^2}
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2 \rangle_t &= (\hbar k_0)^2 - \frac{\hbar^2\,\ell_t^2}{[\,2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t\,]^2} + \frac{\hbar^2}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t} \\
&= (\hbar k_0)^2 - \frac{\hbar^2\,(2\ell^2 - i\omega''_{k_0} t)}{4\ell^2[\,2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t\,]} + \frac{\hbar^2}{2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t} \\
&= (\hbar k_0)^2 + \frac{\hbar^2\,(2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t)}{4\ell^2[\,2\ell^2 + i\omega''_{k_0} t\,]} \\
&= (\hbar k_0)^2 + \frac{\hbar^2}{4\ell^2}\ .
\end{aligned}
$$