Lösungen zum 5. Übungsblatt Quantenmechanik

Aufgabe 1: a) Wir haben

$$|\psi(x)|^2 \;:=\; \frac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} \tag{1}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 \;=\; \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\,dx \;&=\; \frac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\,dx \\ &=\; \frac{1}{\{2\pi\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &=\; 1 \end{aligned} \tag{2}$$

b) Wir bekommen

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} x\,|\psi(x)|^2\,dx \;&=\; \frac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x\, e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\,dx \\ &=\; \frac{\ell}{\{2\pi\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} y\, e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &=\; 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} x^2\,|\psi(x)|^2\,dx \;&=\; \frac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} x^2\, e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\,dx \\ &=\; \frac{\ell^2}{\{2\pi\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} y^2\, e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &=\; \ell^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \hat{p}\,\psi(x) \;&=\; \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/4}}\, e^{-\frac{x^2}{4\ell^2}}\, e^{i\,k_0 x} \right\} \\ &=\; \frac{\hbar}{i} \left\{ \frac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/4}} \left[-\frac{2x}{4\ell^2} + i\,k_0 \right] e^{-\frac{x^2}{4\ell^2}}\, e^{i\,k_0 x} \right\} \end{aligned} \tag{5}$$

und damit

$$\bar{\psi}(x)\,\hat{p}\,\psi(x) \;=\; \frac{\hbar}{i}\, \frac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}} \left[-\frac{x}{2\ell^2} + i\,k_0 \right] e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} \tag{6}$$

Also,

$$\langle\hat{p}\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)\, \tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x}\, \psi(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} \tfrac{\hbar}{i}\, \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}}\, \left[-\tfrac{x}{2\ell^2} + i\,k_0 \right] e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\, dx$$

$$= \; 0 \;+\; \hbar k_0 \int_{\mathbb{R}} \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\, dx$$

$$= \; \hbar k_0 \tag{7}$$

Schliesslich ist

$$\hat{p}^2\, \psi(x) \;\overset{(5)}{=}\; \tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x} \left\{ \tfrac{\hbar}{i}\, \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/4}}\, \left[-\tfrac{x}{2\ell^2} + i\,k_0 \right] e^{-\frac{x^2}{4\ell^2}}\, e^{i\,k_0 x} \right\}$$

$$= \; -\hbar^2\, \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/4}}\, \left[-\tfrac{1}{2\ell^2} + \left(-\tfrac{x}{2\ell^2} + i\,k_0 \right)^2 \right] e^{-\frac{x^2}{4\ell^2}}\, e^{i\,k_0 x}$$

$$= \; -\hbar^2\, \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/4}}\, \left[\tfrac{x^2}{4\ell^4} - \tfrac{1}{2\ell^2} - \tfrac{x}{\ell^2}\, i\,k_0 - k_0^2 \right] e^{-\frac{x^2}{4\ell^2}}\, e^{i\,k_0 x} \tag{8}$$

und damit

$$\bar{\psi}(x)\, \hat{p}^2\, \psi(x) \;=\; -\hbar^2\, \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}}\, \left[\tfrac{x^2}{4\ell^4} - \tfrac{1}{2\ell^2} - \tfrac{x}{\ell^2}\, i\,k_0 - k_0^2 \right] e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} \tag{9}$$

Also,

$$\langle\hat{p}^2\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}(x)\, \hat{p}^2\, \psi(x)\, dx$$

$$= \; -\hbar^2\, \tfrac{1}{\{2\pi\ell^2\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\tfrac{x^2}{4\ell^4} - \tfrac{1}{2\ell^2} - \tfrac{x}{\ell^2}\, i\,k_0 - k_0^2 \right] e^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\, dx$$

$$= \; -\hbar^2\, \tfrac{1}{\{2\pi\}^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\tfrac{y^2}{4\ell^2} - \tfrac{1}{2\ell^2} - \tfrac{y}{\ell}\, i\,k_0 - k_0^2 \right] e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

$$= \; -\hbar^2 \left[\tfrac{1}{4\ell^2} - \tfrac{1}{2\ell^2} - 0 - k_0^2 \right]$$

$$= \; \hbar^2 k_0^2 + \tfrac{\hbar^2}{4\ell^2} \tag{10}$$

c) Wir bekommen

$$\sigma_{\hat{x}} \;=\; \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2}$$

$$= \; \sqrt{\ell^2 - 0} \;=\; \ell \tag{11}$$

und

$$\sigma_{\hat{p}} \;=\; \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2}$$

$$= \; \sqrt{\hbar^2 k_0^2 + \tfrac{\hbar^2}{4\ell^2} - \hbar^2 k_0^2} \;=\; \tfrac{\hbar}{2\ell} \tag{12}$$

Aufgabe 2: Der zu A adjungierte Operator sei mit A^* bezeichnet, also

$$A^* \;=\; \bar{A}^T \tag{13}$$

mit $\bar{A}$ das komplex konjugierte von A. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\{\, i[A,B]\,\}^* \;&=\; -\,i\,(AB-BA)^* \\
&=\; -\,i\,(\bar{A}\bar{B}-\bar{B}\bar{A})^T \\
&=\; -\,i\,(\bar{B}^T\bar{A}^T-\bar{A}^T\bar{B}^T) \\
&=\; -\,i\,(B^*A^*-A^*B^*) \\
&=\; -\,i\,(BA-AB) \\
&=\; +\,i\,(AB-BA) \\
&=\; +\,i\,[A,B]
\end{aligned} \tag{14}$$

und für beliebige selbstadjungierte Operatoren $A = A^*$ können wir schreiben

$$\langle\psi, A\psi\rangle \;=\; \langle A^*\psi,\psi\rangle \;=\; \langle A\psi,\psi\rangle \;=\; \overline{\langle\psi, A\psi\rangle} \tag{15}$$

und damit

$$\langle\psi, A\psi\rangle \;\in\; \mathbb{R} \tag{16}$$

b) Wir bekommen

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\; I(\lambda) \;&=\; \big\|\,[\,\lambda(A-\langle A\rangle) \,-\, i\,(B-\langle B\rangle)\,]\psi\,\big\|^2 \\
&=\; \Big\langle\,[\,\lambda(A-\langle A\rangle) \,-\, i\,(B-\langle B\rangle)\,]\psi\,,\;[\,\lambda(A-\langle A\rangle) \,-\, i\,(B-\langle B\rangle)\,]\psi\,\Big\rangle \\
&\overset{A=A^*,\,B=B^*}{=}\; \Big\langle\,\psi\,,\;[\,\lambda(A-\langle A\rangle) \,+\, i\,(B-\langle B\rangle)\,]\,[\,\lambda(A-\langle A\rangle) \,-\, i\,(B-\langle B\rangle)\,]\psi\,\Big\rangle \\
&=\; \Big\langle\,\psi\,,\;[\,\lambda(A-\langle A\rangle)\,]\,[\,\lambda(A-\langle A\rangle)\,]\psi\,\Big\rangle \\
&\quad +\Big\langle\,\psi\,,\;[\,\lambda(A-\langle A\rangle)\,]\,[\,-\,i\,(B-\langle B\rangle)\,]\psi\,\Big\rangle \\
&\quad +\Big\langle\,\psi\,,\;[\,+\,i\,(B-\langle B\rangle)\,]\,[\,\lambda(A-\langle A\rangle)\,]\psi\,\Big\rangle \\
&\quad +\Big\langle\,\psi\,,\;[\,+\,i\,(B-\langle B\rangle)\,]\,[\,-\,i\,(B-\langle B\rangle)\,]\psi\,\Big\rangle \\
&=\; \lambda^2\Big\langle\,\psi\,,\,(A-\langle A\rangle)^2\psi\,\Big\rangle \\
&\quad -\,i\,\lambda\Big\langle\,\psi\,,\,(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)\psi\,\Big\rangle \\
&\quad +\,i\,\lambda\Big\langle\,\psi\,,\,(B-\langle B\rangle)(A-\langle A\rangle)\psi\,\Big\rangle \\
&\quad +\Big\langle\,\psi\,,\,(B-\langle B\rangle)^2\psi\,\Big\rangle
\end{aligned} \tag{17}$$

Das ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
0 \;\leq\; I(\lambda) \;&=\; \lambda^2\,\sigma_A^2 \;+\; \sigma_B^2 \\
&\quad -\,i\,\lambda\Big\langle\,\psi\,,\,\big(\,AB \,-\, \langle A\rangle\,B \,-\, A\langle B\rangle \,+\, \langle A\rangle\langle B\rangle\,\big)\psi\,\Big\rangle \\
&\quad +\,i\,\lambda\Big\langle\,\psi\,,\,\big(\,BA \,-\, \langle B\rangle\,A \,-\, B\langle A\rangle \,+\, \langle B\rangle\langle A\rangle\,\big)\psi\,\Big\rangle \\
&=\; \lambda^2\,\sigma_A^2 \;+\; \sigma_B^2 \;-\; i\,\lambda\Big\langle\,\psi\,,\,\big(\,AB \,-\, BA\,\big)\psi\,\Big\rangle \\
&=\; \lambda^2\,\sigma_A^2 \;+\; \sigma_B^2 \;-\; \lambda\,\langle\,i[A,B]\,\rangle
\end{aligned} \tag{18}
$$

Das $I(\lambda)$ ist als Funktion von $\lambda \in \mathbb{R}$ eine nach oben geöffnete Parabel, hat also ein eindeutiges Minimum bei

$$
\begin{aligned}
2\lambda\,\sigma_A^2 \;-\; \langle\,i[A,B]\,\rangle \;&=\; 0 \\
\Leftrightarrow \qquad \lambda_{\min} \;&=\; \frac{\langle\,i[A,B]\,\rangle}{2\sigma_A^2}
\end{aligned} \tag{19}
$$

Der Wert des Minimums ist dann gegeben durch

$$
\begin{aligned}
I(\lambda_{\min}) \;&=\; \frac{\langle\,i[A,B]\,\rangle^2}{4\sigma_A^4}\,\sigma_A^2 \;+\; \sigma_B^2 \;-\; \frac{\langle\,i[A,B]\,\rangle}{2\sigma_A^2}\,\langle\,i[A,B]\,\rangle \\
&=\; \sigma_B^2 \;-\; \frac{\langle\,i[A,B]\,\rangle^2}{4\sigma_A^2} \;\geq\; 0
\end{aligned} \tag{20}
$$

Das grösser gleich Null muss gelten, da das $I(\lambda)$ nach Definition als Norm-Quadrat für beliebiges λ immer positiv sein muss, also auch am Minimum. Aus (20) folgt dann

$$
\sigma_A^2\,\sigma_B^2 \;\geq\; \frac{\langle\,i[A,B]\,\rangle^2}{4}
$$

oder, mit $\sqrt{x^2} = |x|$,

$$
\sigma_A\,\sigma_B \;\geq\; \frac{|\langle\,i[A,B]\,\rangle|}{2}\;. \tag{21}
$$

c) Der Kommutator von $\hat{x}_j$ und $\hat{p}_j = -i\hbar\,\partial/\partial x_j$ ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
[\hat{x}_j, \hat{p}_j]\psi \;&=\; x_j\,\tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}\,\psi \;-\; \tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{\partial}{\partial x_j}\,x_j\,\psi \\
&=\; x_j\,\tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{\partial\psi}{\partial x_j} \;-\; \tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{\partial(x_j\psi)}{\partial x_j} \\
&=\; x_j\,\tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{\partial\psi}{\partial x_j} \;-\; \tfrac{\hbar}{i}\,\tfrac{\partial x_j}{\partial x_j}\,\psi \;-\; \tfrac{\hbar}{i}\,x_j\,\tfrac{\partial\psi}{\partial x_j} \\
&=\; -\,\tfrac{\hbar}{i}\,\psi
\end{aligned} \tag{22}
$$

oder

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_j] \quad = \quad +i\,\hbar \tag{23}$$

Also,

$$\sigma_{\hat{x}_j} \cdot \sigma_{\hat{p}_j} \quad \geq \quad \tfrac{|\langle\, i[\hat{x}_j, \hat{p}_j]\,\rangle|}{2} \quad = \quad \tfrac{\hbar}{2} \quad . \tag{24}$$