Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

Lösungen zum 4. Übungsblatt
Quantenmechanik

Aufgabe 1: Wir haben für $|m| < N$

$$
\begin{aligned}
(D_+D_-f)_m &= \tfrac{(D_-f)_{m+1}-(D_-f)_m}{\Delta x} \\
&= \tfrac{1}{\Delta x}\left\{ \tfrac{f_{m+1}-f_m}{\Delta x} - \tfrac{f_m-f_{m-1}}{\Delta x} \right\} \\
&= \tfrac{f_{m+1}+f_{m-1}-2f_m}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(D_-D_+f)_m &= \tfrac{(D_+f)_m-(D_+f)_{m-1}}{\Delta x} \\
&= \tfrac{1}{\Delta x}\left\{ \tfrac{f_{m+1}-f_m}{\Delta x} - \tfrac{f_m-f_{m-1}}{\Delta x} \right\} \\
&= \tfrac{f_{m+1}+f_{m-1}-2f_m}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}
$$

und etwa für $m = +N$:

$$
\begin{aligned}
(D_+D_-f)_N &= \tfrac{(D_-f)_{-N}-(D_-f)_N}{\Delta x} \\
&= \tfrac{1}{\Delta x}\left\{ \tfrac{f_{-N}-f_{+N}}{\Delta x} - \tfrac{f_N-f_{N-1}}{\Delta x} \right\} \\
&= \tfrac{f_{-N}+f_{N-1}-2f_N}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}
$$

was identisch ist mit

$$
\begin{aligned}
(D_-D_+f)_N &= \tfrac{(D_+f)_N-(D_+f)_{N-1}}{\Delta x} \\
&= \tfrac{1}{\Delta x}\left\{ \tfrac{f_{-N}-f_N}{\Delta x} - \tfrac{f_N-f_{N-1}}{\Delta x} \right\} \\
&= \tfrac{f_{-N}+f_{N-1}-2f_N}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}
$$

Die Rechnung für $m = -N$ ist analog.

Aufgabe 2: Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-N}^{N} e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)m}{2N+1}} \quad &\overset{n=m+N}{=} \quad \sum_{n=0}^{2N} e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)(n-N)}{2N+1}} \\
&= \quad e^{-\,i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)N}{2N+1}} \sum_{n=0}^{2N} e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)n}{2N+1}} \\
&= \quad e^{-\,i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)N}{2N+1}} \sum_{n=0}^{2N} \Big(e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)}{2N+1}} \Big)^n \\
&= \quad e^{-\,i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)N}{2N+1}} \sum_{n=0}^{2N} q^n
\end{aligned}$$

mit

$$q \quad := \quad e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)}{2N+1}}$$

Für $q \neq 1$ ist

$$\sum_{n=0}^{2N} q^n \quad = \quad \frac{1-q^{2N+1}}{1-q} \quad = \quad \frac{1\,-\,e^{i\,2\pi\,(j-\ell)}}{1-q} \quad = \quad \frac{1-1}{1-q} \quad = \quad 0$$

und für $q = 1$ ist offensichtlich

$$\sum_{n=0}^{2N} q^n \quad = \quad 2N+1$$

Die Gleichung $q = 1$ ist äquivalent zu

$$e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)}{2N+1}} \quad = \quad 1 \quad = \quad e^{\,i\,2\pi\,m}$$

oder

$$\frac{j-\ell}{2N+1} \quad = \quad m \quad \in \quad \mathbb{Z}$$

Also dürfen sich j und ℓ nur um ein ganzzahliges Vielfaches von $2N+1$ unterscheiden,

$$j \quad = \quad \ell \;+\; (2N+1)m\;, \qquad m \in \mathbb{Z}$$

Falls $-N \leq j, \ell \leq +N$ gilt, muss dann notwendig $j = \ell$ sein und wir bekommen

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{i\,2\pi\,\frac{(j-\ell)n}{2N+1}} \quad = \quad (2N+1) \times \delta_{j,\ell} \quad .$$

Aufgabe 3: Wir bekommen

$$\begin{aligned}
(F^2)_{j,\ell} \quad &= \quad \sum_{m=-N}^{N} F_{j,m}\, F_{m,\ell} \\
&= \quad \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} e^{\,i\,2\pi\,\frac{jm}{2N+1}}\; e^{\,i\,2\pi\,\frac{m\ell}{2N+1}} \\
&= \quad \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} e^{\,i\,2\pi\,\frac{(j+\ell)m}{2N+1}} \quad = \quad \delta_{j+\ell,0}
\end{aligned}$$

Da die Summe von $j+\ell$ maximal $2N$ und mindestens $-2N$ ist, kann $j+\ell$ kein ganzzahliges Vielfaches von $2N+1$ sein, sondern da kommt nur $j+\ell=0$ in Frage. In Matrix-Notation haben wir also

$$F^2 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und die Wirkung auf ein $f=(f_{-N},\cdots,f_N)\in\mathbb{C}^{2N+1}$ ist gegeben durch

$$(F^2 f)_m \quad = \quad f_{-m}$$

Offensichtlich ist dann

$$(F^4 f)_m \quad = \quad (F^2F^2f)_m \quad = \quad (F^2 f)_{-m} \quad = \quad f_{-(-m)} \quad = \quad f_m$$

also $F^4 = Id$ ist die Einheitsmatrix.

Aufgabe 4: Wir haben

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,kx}\, f(x)\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,kx}\, x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \quad \int_{-\infty}^{\infty} (-i)\, \tfrac{d}{dk} e^{i\,kx}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \quad (-i)\, \tfrac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,kx}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\overset{\text{Thm.3.5}}{=} \quad (-i)\, \tfrac{d}{dk} e^{-\frac{k^2}{2}} \\
&= \quad +i\,k\,e^{-\frac{k^2}{2}} \quad .
\end{aligned}$$