Hochschule RheinMain WS 2022/23
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 3. Übungsblatt
Quantenmechanik

Aufgabe 1: Das ψ erfüllt die Schrödinger-Gleichung und das komplex konjugierte $\bar{\psi}$ erfüllt dann die komplex konjugierte Schrödinger-Gleichung (mit V reellwertig):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \Big\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\Big\}\psi \tag{1}$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi} = \Big\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\Big\}\bar{\psi} \tag{2}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}(\psi\bar{\psi}) = \frac{\partial\psi}{\partial t}\bar{\psi} + \psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t} \\
&= \Big[\frac{1}{i\hbar}\Big\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\Big\}\psi\Big]\cdot\bar{\psi} \\
&\quad + \psi\cdot\Big[\frac{1}{-i\hbar}\Big\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\Big\}\bar{\psi}\Big] \\
&= \frac{\hbar}{2mi}\Big\{-\bar{\psi}\Delta\psi + \psi\Delta\bar{\psi}\Big\} + \frac{1}{i\hbar}\big(V\psi\bar{\psi} - V\psi\bar{\psi}\big) \\
&= \frac{\hbar}{2mi}\Big\{-\bar{\psi}\Delta\psi + \psi\Delta\bar{\psi}\Big\}
\end{aligned} \tag{3}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{j} &= \frac{\hbar}{2mi}\operatorname{div}\big(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}\big) \\
&= \frac{\hbar}{2mi}\big(\nabla\bar{\psi}\nabla\psi + \bar{\psi}\Delta\psi - \nabla\psi\nabla\bar{\psi} - \psi\Delta\bar{\psi}\big) \\
&= -\frac{\hbar}{2mi}\big(-\bar{\psi}\Delta\psi + \psi\Delta\bar{\psi}\big)
\end{aligned} \tag{4}$$

folgt dann die Behauptung

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = -\operatorname{div}\vec{j}\ . \tag{5}$$

Aufgabe 2: Wir haben

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\nabla\psi &= \big(\bar{A}e^{-i\vec{k}\vec{x}} + \bar{B}e^{+i\vec{k}\vec{x}}\big)\cdot\big(Ai\vec{k}e^{+i\vec{k}\vec{x}} - Bi\vec{k}e^{-i\vec{k}\vec{x}}\big) \\
&= i\vec{k}\big(\bar{A}e^{-i\vec{k}\vec{x}} + \bar{B}e^{+i\vec{k}\vec{x}}\big)\cdot\big(Ae^{+i\vec{k}\vec{x}} - Be^{-i\vec{k}\vec{x}}\big) \\
&= i\vec{k}\big(|A|^2 - |B|^2 + A\bar{B}e^{+i2\vec{k}\vec{x}} - \bar{A}Be^{-i2\vec{k}\vec{x}}\big)
\end{aligned}$$

oder

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\,\nabla\psi &= i\vec{k}\left(|A|^2 - |B|^2\right) + i\vec{k}\cdot 2\,i\,\mathrm{Im}\big[A\bar{B}\,e^{+i\,2\vec{k}\vec{x}}\big] \\
&= i\vec{k}\left(|A|^2 - |B|^2\right) - \underbrace{2\vec{k}\cdot\mathrm{Im}\big[A\bar{B}\,e^{+i\,2\vec{k}\vec{x}}\big]}_{\in\mathbb{R}} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\vec{j}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}[\bar{\psi}\,\nabla\psi] = \frac{\hbar\vec{k}}{m}\left(|A|^2 - |B|^2\right) . \qquad (7)
$$

Aufgabe 3: a) Eine ebene Welle

$$
\psi(\vec{x},t) := e^{+i\,[\vec{k}\vec{x}-\omega t]} \qquad (8)
$$

ist genau dann eine Lösung der freien, zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$
i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta\,\psi \qquad (9)
$$

wenn

$$
i\,\hbar\,(-i\,\omega)\,e^{+i\,[\vec{k}\vec{x}-\omega t]} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,(i\vec{k})^2\,e^{+i\,[\vec{k}\vec{x}-\omega t]}
$$

oder

$$
\hbar\omega = \frac{(\hbar\vec{k})^2}{2m} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \qquad (10)
$$

gilt. Also haben wir für $j = 1, 2$:

$$
\omega_j = \frac{\hbar\,\vec{k}_j^{\,2}}{2m} . \qquad (11)
$$

b) Mit

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{x},t) &= A_1\,e^{+i\,[\vec{k}_1\vec{x}-\omega_1 t]} + A_2\,e^{+i\,[\vec{k}_2\vec{x}-\omega_2 t]} \\
&=: A_1\,e^{+i\,[\cdots]_1} + A_2\,e^{+i\,[\cdots]_2} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

bekommen wir

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\,\nabla\psi &= \left(\bar{A}_1\,e^{-i\,[\cdots]_1} + \bar{A}_2\,e^{-i\,[\cdots]_2}\right)\cdot\left(A_1\,i\vec{k}_1\,e^{+i\,[\cdots]_1} + A_2\,i\vec{k}_2\,e^{+i\,[\cdots]_2}\right) \\
&= i\,\vec{k}_1\,|A_1|^2 + i\,\vec{k}_2\,|A_2|^2 \\
&\quad + i\,\vec{k}_1\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t]} + i\,\vec{k}_2\,\bar{A}_1A_2\,e^{-i\,[(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t]} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

oder

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\,\nabla\psi \;&=\; i\,\vec{k}_1\,|A_1|^2 \,+\, i\,\vec{k}_2\,|A_2|^2 \,+\, i\,(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]} \\
&\quad -\,i\,\vec{k}_2\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]} \,+\, i\,\vec{k}_2\,\bar{A}_1A_2\,e^{-i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]} \\
&=\; i\,\vec{k}_1\,|A_1|^2 \,+\, i\,\vec{k}_2\,|A_2|^2 \,+\, i\,(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]} \\
&\quad -\,i\,\vec{k}_2\,\Big\{\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]} \,-\, \bar{A}_1A_2\,e^{-i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\Big\} \\
&=\; i\,\vec{k}_1\,|A_1|^2 \,+\, i\,\vec{k}_2\,|A_2|^2 \,+\, i\,(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]} \\
&\quad -\,i\,\vec{k}_2\,2\,i\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&=\; i\,\vec{k}_1\,|A_1|^2 \,+\, i\,\vec{k}_2\,|A_2|^2 \,+\, i\,(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]} \\
&\quad +\,\underbrace{2\,\vec{k}_2\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big]}_{\in\,\mathbb{R}}
\end{aligned} \tag{14}$$

Also erhalten wir den Strom

$$\begin{aligned}
\vec{j} \;&=\; \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}[\,\bar{\psi}\,\nabla\psi\,] \\
&=\; \frac{\hbar\vec{k}_1}{m}\,|A_1|^2 \,+\, \frac{\hbar\vec{k}_2}{m}\,|A_2|^2 \,+\, \frac{\hbar(\vec{k}_1+\vec{k}_2)}{m} \,\times\, \mathrm{Re}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big]
\end{aligned} \tag{15}$$

c) Mit

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x},t) \;&=\; A_1\,e^{+i\,[\,\vec{k}_1\vec{x}-\omega_1 t\,]} \,+\, A_2\,e^{+i\,[\,\vec{k}_2\vec{x}-\omega_2 t\,]} \\
&=:\; A_1\,e^{+i\,[\cdots]_1} \,+\, A_2\,e^{+i\,[\cdots]_2}
\end{aligned} \tag{16}$$

bekommen wir die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned}
|\psi(\vec{x},t)|^2 \;&=\; \bar{\psi}(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x},t) \\
&=\; \big(\,\bar{A}_1\,e^{-i\,[\cdots]_1} \,+\, \bar{A}_2\,e^{-i\,[\cdots]_2}\,\big)\cdot\big(\,A_1\,e^{+i\,[\cdots]_1} \,+\, A_2\,e^{+i\,[\cdots]_2}\,\big) \\
&=\; |A_1|^2 \,+\, |A_2|^2 \,+\, 2\,\mathrm{Re}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big]
\end{aligned} \tag{17}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(\vec{x},t)|^2 \;&=\; 0 \,+\, 2\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Re}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&=\; 2\,\mathrm{Re}\big[\,A_1\bar{A}_2\,(-i)(\omega_1-\omega_2)\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&=\; -\,2\,\mathrm{Re}\big[\,i\,A_1\bar{A}_2\,(\omega_1-\omega_2)\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big]
\end{aligned} \tag{18}$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(\vec{x},t)|^2 &= +2\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,(\omega_1-\omega_2)\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&= +2\,(\omega_1-\omega_2)\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&= +2\,\big(\,\frac{\hbar\vec{k}_1^{\,2}}{2m}\,-\,\frac{\hbar\vec{k}_2^{\,2}}{2m}\,\big)\,\times\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&= \frac{\hbar}{m}\,(\,\vec{k}_1^{\,2}\,-\,\vec{k}_2^{\,2}\,)\,\times\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \qquad (19)
\end{aligned}$$

Andererseits, mit dem Strom aus Teil (b) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{j} &= \frac{\hbar}{m}\,\times\,\mathrm{div}\Big\{\,\mathrm{Re}\big[\,A_1\bar{A}_2\,(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big]\,\Big\} \\
&= \frac{\hbar}{m}\,\times\,\mathrm{Re}\big[\,A_1\bar{A}_2\,i\,(\vec{k}_1+\vec{k}_2)(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&= \frac{\hbar}{m}\,\times\,\mathrm{Re}\big[\,A_1\bar{A}_2\,i\,(\vec{k}_1^{\,2}-\vec{k}_2^{\,2})\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&= -\,\frac{\hbar}{m}\,\times\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,(\vec{k}_1^{\,2}-\vec{k}_2^{\,2})\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \\
&= -\,\frac{\hbar}{m}\,(\,\vec{k}_1^{\,2}\,-\,\vec{k}_2^{\,2}\,)\,\times\,\mathrm{Im}\big[\,A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \qquad (20)
\end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi(\vec{x},t)|^2\,+\,\mathrm{div}\,\vec{j}\;=\;0\quad .$$

d) Für beliebige $\vec{k}_1, \vec{k}_2$ ist das $\vec{j}$ gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{x},t) \;=\; \frac{\hbar\vec{k}_1}{m}\,|A_1|^2\,+\,\frac{\hbar\vec{k}_2}{m}\,|A_2|^2\,+\,\frac{\hbar(\vec{k}_1+\vec{k}_2)}{m}\,\mathrm{Re}\big[A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\vec{x}-(\omega_1-\omega_2)t\,]}\,\big] \qquad (21)$$

Für $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1 =: -\vec{k}$ fällt der letzte Teil weg und wir erhalten das Ergebnis aus Aufgabe 2,

$$\vec{j}(\vec{x},t) \;=\; \frac{\hbar\vec{k}}{m}\,|A_1|^2\,+\,\frac{\hbar(-\vec{k})}{m}\,|A_2|^2 \;=\; \frac{\hbar\vec{k}}{m}\,(\,|A_1|^2\,-\,|A_2|^2\,) \qquad (22)$$

Und für $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 =: \vec{k}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{j}(\vec{x},t) &= \frac{\hbar\vec{k}}{m}\,|A_1|^2\,+\,\frac{\hbar\vec{k}}{m}\,|A_2|^2\,+\,2\,\frac{\hbar\vec{k}}{m}\,\mathrm{Re}\big[A_1\bar{A}_2\,e^{+i\,[\,(\vec{k}-\vec{k})\vec{x}-(\omega-\omega)t\,]}\,\big] \\
&= \frac{\hbar\vec{k}}{m}\,\big\{\,|A_1|^2\,+\,|A_2|^2\,+\,2\,\mathrm{Re}[A_1\bar{A}_2]\,\big\} \;=\; \frac{\hbar\vec{k}}{m}\,|A_1+A_2|^2\quad . \qquad (23)
\end{aligned}$$