Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

Lösungen zum 2. Übungsblatt
Quantenmechanik

Aufgabe 1: a) Wir bekommen

$$
\begin{aligned}
E^2 - p^2c^2 &= \frac{(mc^2)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - c^2\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
&= (mc^2)^2 \times \left\{ \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \right\} \\
&= (mc^2)^2 \times 1
\end{aligned}
$$

b) Die Planck-Einstein und die de Broglie Beziehung lauten

$$
\begin{aligned}
E &= h\nu \\
p &= h/\lambda
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt generell für monochromatische Wellen: Die Wellengeschwindigkeit c, das ist hier also die Lichtgeschwindigkeit, ist gegeben durch

$$
c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu
$$

wenn T die Periodendauer und $\nu = 1/T$ die Frequenz ist. Also können wir schreiben

$$
E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc \ .
$$

c) Mit der Taylor-Entwicklung

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \frac{1}{\sqrt{1-0}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-0}^{\,3}} \cdot (-1) \cdot x + O(x^2) \\
&= 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)
\end{aligned}
$$

bekommen wir

$$
\begin{aligned}
E(v) &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
&= mc^2 \times \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O\Big(\frac{v^4}{c^4}\Big) \right\} \\
&= mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + O\Big(\frac{mv^4}{c^2}\Big) \ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: a) Wir haben Energie- und Impuls-Erhaltung,

$$E_{\rm ph} + E_e = E'_{\rm ph} + E'_e \tag{1}$$

$$\vec{p}_{\rm ph} + \vec{p}_e = \vec{p}_{\rm ph}\,' + \vec{p}_e\,' \tag{2}$$

mit

$$\vec{p}_e = \vec{0}$$

$$E_e = m_e c^2$$

Aus Gleichung (2) bekommen wir

$$\vec{p}_{\rm ph} - \vec{p}_{\rm ph}\,' = \vec{p}_e\,' \tag{3}$$

Wir quadrieren Gleichung (3) und multiplizieren mit c^2:

$$c^2(p'_e)^2 = c^2\left\{ p_{\rm ph}^2 + (p'_{\rm ph})^2 - 2p_{\rm ph}p'_{\rm ph}\cos\varphi \right\} \tag{4}$$

Nach der relativistischen Energie-Impuls Beziehung gilt

$$\begin{aligned} c^2(p'_e)^2 &= (E'_e)^2 - (m_e c^2)^2 \\ &\overset{(1)}{=} \big(E_{\rm ph} - E'_{\rm ph} + E_e \big)^2 - (m_e c^2)^2 \\ &\overset{E_e = m_e c^2}{=} (E_{\rm ph} - E'_{\rm ph})^2 + 2(E_{\rm ph} - E'_{\rm ph}) m_e c^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Jetzt benutzen wir die relativistische Energie-Impuls Beziehung für Photonen,

$$E_{\rm ph} = p_{\rm ph} c$$
$$E'_{\rm ph} = p'_{\rm ph} c$$

und erhalten damit aus (5)

$$\begin{aligned} c^2(p'_e)^2 &= (E_{\rm ph} - E'_{\rm ph})^2 + 2(E_{\rm ph} - E'_{\rm ph}) m_e c^2 \\ &= c^2(p_{\rm ph} - p'_{\rm ph})^2 + 2c(p_{\rm ph} - p'_{\rm ph}) m_e c^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Das setzen wir jetzt auf der linken Seite von (4) ein:

$$c^2(p_{\rm ph} - p'_{\rm ph})^2 + 2c(p_{\rm ph} - p'_{\rm ph}) m_e c^2 = c^2\left\{ p_{\rm ph}^2 + (p'_{\rm ph})^2 - 2p_{\rm ph}p'_{\rm ph}\cos\varphi \right\} \tag{7}$$

Wir quadrieren aus auf der linken Seite und teilen durch c^2:

$$p_{\rm ph}^2 + (p'_{\rm ph})^2 - 2p_{\rm ph}p'_{\rm ph} + 2m_e c(p_{\rm ph} - p'_{\rm ph}) = p_{\rm ph}^2 + (p'_{\rm ph})^2 - 2p_{\rm ph}p'_{\rm ph}\cos\varphi \tag{8}$$

oder

$$2m_e c(p_{\rm ph} - p'_{\rm ph}) = 2p_{\rm ph}p'_{\rm ph}[1 - \cos\varphi] \tag{9}$$

Wir teilen Gleichung (9) durch $2m_e c p_{\text{ph}} p'_{\text{ph}}$ und erhalten

$$\frac{1}{p'_{\text{ph}}} - \frac{1}{p_{\text{ph}}} = \frac{1}{m_e c}\left[1 - \cos\varphi\right] \tag{10}$$

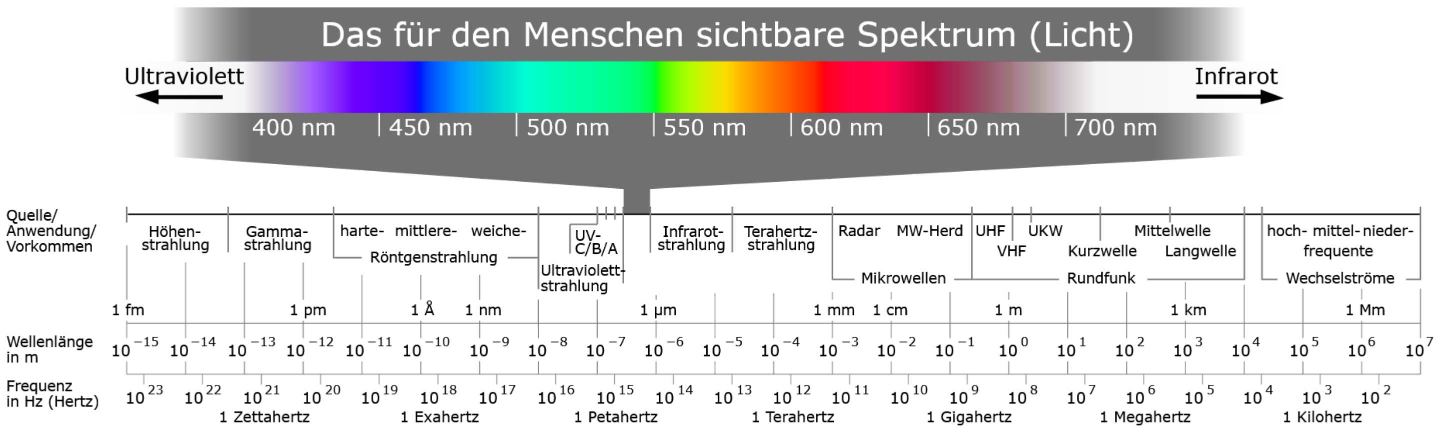
Schliesslich benutzen wir noch die de Broglie Beziehung $p = h/\lambda$ und bekommen das gewünschte Resultat:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left[1 - \cos\varphi\right] \tag{11}$$

b) Wir bekommen

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{Compton}} &:= \frac{h}{m_e c} = \frac{hc}{m_e c^2} \\
&\approx \frac{6.6 \times 10^{-34}\,\text{Js} \times 3 \times 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{511 \times 10^{3}\,\text{eV}} \\
&\approx \frac{13 \times 10^{-26}\,\text{Jm} \times 3}{10^{6}\,\text{eV}} \\
&\approx \frac{39 \times 10^{-32}\,\text{Jm}}{1.6 \times 10^{-19}\,\text{J}} \\
&\approx \frac{39}{16} \times 10^{-12}\,\text{m} \approx 2.4\,\text{pm} \ .
\end{aligned}$$

Das elektromagnetische Spektrum sieht so aus:



Elektromagnetische Strahlung im Pikometer-Bereich wird also als Gamma-Strahlung bezeichnet und ist kurzwelliger und energiereicher als Röntgenstrahlung.