Hochschule RheinMain WS 2022/23
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 14. Übungsblatt Quantenmechanik

1.Aufgabe: **a)** Die Formel

$$(a^+ + a)^m \;=\; \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{m-2k} \frac{(a^+)^{m-2k-j}\, a^j}{(m-2k-j)!\, j!}$$

liefert für den Fall $m = 2$:

$$\begin{aligned}
(a^+ + a)^2 \;&=\; \sum_{k=0}^{1} \frac{2!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{2-2k} \frac{(a^+)^{2-2k-j}\, a^j}{(2-2k-j)!\, j!} \\
&=\; \frac{2!}{2^0 0!} \sum_{j=0}^{2} \frac{(a^+)^{2-j}\, a^j}{(2-j)!\, j!} \;+\; \frac{2!}{2^1 1!} \sum_{j=0}^{0} \frac{(a^+)^{0-j}\, a^j}{(0-j)!\, j!} \\
&=\; 2 \left\{ \frac{(a^+)^2\, a^0}{2!\, 0!} + \frac{(a^+)^1\, a^1}{1!\, 1!} + \frac{(a^+)^0\, a^2}{0!\, 2!} \;+\; 1 \right\} \\
&=\; (a^+)^2 \;+\; 2\, a^+ a \;+\; a^2 \;+\; 1 \\
&\overset{1=[a,a^+]}{=}\; (a^+)^2 \;+\; 2\, a^+ a \;+\; a^2 \;+\; a a^+ \;-\; a^+ a \\
&=\; (a^+)^2 \;+\; a^+ a \;+\; a a^+ \;+\; a^2
\end{aligned}$$

und das ist offensichtlich korrekt.

b) Für $m = 4$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a^+ + a)^4 \;&=\; \sum_{k=0}^{2} \frac{4!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{4-2k} \frac{(a^+)^{4-2k-j}\, a^j}{(4-2k-j)!\, j!} \\
&=\; \frac{4!}{2^0 0!} \sum_{j=0}^{4} \frac{(a^+)^{4-j}\, a^j}{(4-j)!\, j!} \\
&\quad+ \frac{4!}{2^1 1!} \sum_{j=0}^{2} \frac{(a^+)^{2-j}\, a^j}{(2-j)!\, j!} \\
&\quad+ \frac{4!}{2^2 2!} \sum_{j=0}^{0} \frac{(a^+)^{0-j}\, a^j}{(0-j)!\, j!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & 24 \left\{ \frac{(a^+)^4}{4!} + \frac{(a^+)^3\, a}{3!\,1!} + \frac{(a^+)^2\, a^2}{2!\,2!} + \frac{a^+\, a^3}{1!\,3!} + \frac{a^4}{4!} \right\} \\
& + 12 \left\{ \frac{(a^+)^2}{2!} + \frac{a^+\, a}{1!\,1!} + \frac{a^2}{2!} \right\} \\
& + 3 \times 1 \\
= \quad & (a^+)^4 + 4(a^+)^3 a + 6(a^+)^2 a^2 + 4a^+a^3 + a^4 \\
& + 6(a^+)^2 + 12a^+a + 6a^2 + 3 \ .
\end{aligned}
$$

c) Mit $\hat{n} := a^+ a$ bekommen wir aus Teil (b)

$$
\begin{aligned}
(a^+ + a)^4 \quad = \quad & (a^+)^4 + 4(a^+)^3 a + 6(a^+)^2 a^2 + 4a^+a^3 + a^4 \\
& + 6(a^+)^2 + 12a^+a + 6a^2 + 3 \\
= \quad & (a^+)^4 + 4(a^+)^2\, \hat{n} + 6\, a^+\, \hat{n}\, a + 4\, \hat{n} a^2 + a^4 \\
& + 6(a^+)^2 + 12\, \hat{n} + 6\, a^2 + 3
\end{aligned}
$$

Nun gilt für beliebiges n

$$
\hat{n}\, a\, h_n \quad = \quad a\, (\hat{n} - 1)\, h_n
$$

Also ist

$$
a^+\, \hat{n}\, a \quad = \quad a^+ a\, (\hat{n} - 1) \quad = \quad \hat{n}\, (\hat{n} - 1)
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
(a^+ + a)^4 \quad = \quad & (a^+)^4 + 4(a^+)^2\, \hat{n} + 6\, a^+\, \hat{n}\, a + 4\, \hat{n} a^2 + a^4 \\
& + 6(a^+)^2 + 12\, \hat{n} + 6\, a^2 + 3 \\
= \quad & (a^+)^4 + 4(a^+)^2\, \hat{n} + 6\, \hat{n}\, (\hat{n} - 1) + 4\, \hat{n} a^2 + a^4 \\
& + 6(a^+)^2 + 12\, \hat{n} + 6\, a^2 + 3 \\
= \quad & (a^+)^4 + (a^+)^2 (4\hat{n} + 6) + 6\, \hat{n}\, (\hat{n} - 1) + (4\hat{n} + 6) a^2 + a^4 + 12\, \hat{n} + 3 \\
= \quad & (a^+)^4 + (a^+)^2 (4\hat{n} + 6) + (4\hat{n} + 6) a^2 + a^4 + 6\, \hat{n}\, (\hat{n} + 1) + 3
\end{aligned}
$$

Berücksichtigen wir noch, dass

$$
\hat{n}\, a^2\, h_n \quad = \quad a^2\, (\hat{n} - 2)\, h_n
$$

für beliebige h_n's gilt, erhalten wir dann die Formel aus Teil (c),

$$
(a^+ + a)^4 \quad = \quad (a^+)^4 + (a^+)^2\, (4\hat{n} + 6) + a^2\, (4\hat{n} - 2) + a^4 + 6\, \hat{n}\, (\hat{n} + 1) + 3 \ .
$$