Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2022/23

Lösungen 13. Übungsblatt Quantenmechanik

1.Aufgabe: Es sei

$$M_t \;:=\; e^{tA}\, B\, e^{-tA}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}M_t &= \tfrac{d}{dt}\big\{e^{tA}\, B\, e^{-tA}\big\}\\ &= A\, e^{tA}\, B\, e^{-tA} \;-\; e^{tA}\, B\, e^{-tA}\, A\\ &= A\, M_t \;-\; M_t\, A\\ &= [A, M_t]\\ &= L_A\, M_t\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt}M_t \;=\; L_A\, M_t$$

wird aber gerade gelöst von

$$e^{tL_A} M_0 \;=\; e^{tL_A}\, B \;\;.$$

2.Aufgabe: Es sei

$$M_t \;:=\; e^{tA}\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$$

Wir zeigen, dass M_t die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{dt}M_t \;=\; (A+B)M_t$$

erfüllt. Da die linke und die rechte Seite der zu beweisenden Formel für $t = 0$ offensichtlich identisch sind, folgt dann die Behauptung. Wir haben

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}M_t \;=\;& A\, e^{tA}\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}\\ &+ e^{tA}\, B\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}\\ &+ e^{tA}\, e^{tB}\, (-t[A,B])\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}\end{aligned} \tag{1}$$

Da $[A, B]$ mit A und mit B kommutiert, kommutiert $[A, B]$ auch mit e^{tA} und mit e^{tB}. Den letzten Term in (1) können wir also auch so schreiben:

$$e^{tA}\, e^{tB}\, (-t[A,B])\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \;=\; -t[A,B]\, e^{tA}\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$$

Den zweiten Term in (1) schreiben wir so:

$$\begin{aligned} e^{tA}\, B\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} &= e^{tA}\, B\, e^{-tA}\, e^{tA} e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ &\overset{\text{Aufg.1}}{=} e^{tL_A}(B)\, e^{tA} e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \end{aligned} \tag{2}$$

Nun haben wir

$$e^{tL_A}(B) \;=\; \Big\{ Id \;+\; L_A \;+\; \tfrac{1}{2} L_A^2 \;+\; \tfrac{1}{3!} L_A^3 \;+\; \cdots \Big\}(B)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} L_A(B) &= [A,B] \\ L_A^2(B) &= L_A\big([A,B]\big) \;=\; \big[\, A\,,\, [A,B]\, \big] \;\overset{\substack{\text{nach} \\ \text{Voraussetzung}}}{=}\; 0 \end{aligned}$$

und damit

$$L_A^n(B) \;=\; 0 \quad \forall n \geq 2 \;\; .$$

Also,

$$e^{tL_A}(B) \;=\; B \;+\; t[A,B]$$

und den zweiten Term in (1) können wir auch so schreiben:

$$\begin{aligned} e^{tA}\, B\, e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} &= e^{tL_A}(B)\, e^{tA} e^{tB}\, e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \\ &= \big\{ B \;+\; t[A,B] \big\}\, M_t \end{aligned}$$

Wenn wir das in (1) einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} M_t &= A\, M_t \;+\; \big\{ B \;+\; t[A,B] \big\}\, M_t \;-\; t[A,B]\, M_t \\ &= (A+B) M_t \end{aligned}$$

und diese DGL wird gerade gelöst von

$$M_t \;=\; e^{t(A+B)} M_0 \;=\; e^{t(A+B)} \quad .$$

3.Aufgabe: Wir haben

$$AB \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$[A,B] \;=\; AB - BA \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit bekommen wir

$$A\,[A,B] \;=\; B\,[A,B] \;=\; [A,B]\,A \;=\; [A,B]\,B \;=\; 0$$

und damit auch

$$\big[\,A\,,\,[A,B]\,\big] \;=\; \big[\,B\,,\,[A,B]\,\big] \;=\; 0$$

also sind die Voraussetzungen von Aufgabe 2 erfüllt. Wir haben nun

$$A^2 \;=\; B^2 \;=0$$

und damit

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= Id \;+\; tA \\
e^{tB} &= Id \;+\; tB \\
e^{t(A+B)} &= Id \;+\; t(A+B) \;+\; \tfrac{t^2}{2}(A^2+AB+BA+B^2) \\
&\overset{BA=0}{=} Id \;+\; t(A+B) \;+\; \tfrac{t^2}{2}AB
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$[A,B]^2 \;=\; 0$$

und damit

$$e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \;=\; Id \;-\; \tfrac{t^2}{2}\,[A,B]$$

Zu überprüfen ist die Formel

$$e^{t(A+B)} \;=\; e^{tA}\,e^{tB}\,e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]} \tag{3}$$

Die linke Seite ist gegeben durch

$$e^{t(A+B)} \;=\; Id \;+\; t(A+B) \;+\; \tfrac{t^2}{2}AB \;=\; \begin{pmatrix} 0 & ta & \frac{t^2}{2}ab \\ 0 & 0 & tb \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

und die rechte Seite ist, wenn wir noch $BA = 0$ berücksichtigen,

$$\begin{aligned}
&(Id+tA)(Id+tB)\big(Id \;-\; \tfrac{t^2}{2}\,[A,B]\big) \\
&= \big(Id \;+\; t(A+B) \;+\; t^2AB\big)\big(Id \;-\; \tfrac{t^2}{2}\,AB\big) \\
&= Id \;+\; t(A+B) \;+\; t^2AB \;-\; \tfrac{t^2}{2}\,AB \\
&= Id \;+\; t(A+B) \;+\; \tfrac{t^2}{2}AB
\end{aligned}$$

und das ist identisch mit (4).

Ok, vielleicht könnte man sich auch noch ein interessanteres Beispiel überlegen..