Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2022/23

Lösungen zum 1. Übungsblatt
Quantenmechanik

Aufgabe 1: a) 1 Watt ist 1 Joule pro Sekunde, also werden pro Sekunde 100 Joule an Energie abgestraht. Die Planck-Einstein Relation $E = h\nu$ sagt, dass Licht aus einzelnen Energie-Paketen, Photonen, besteht und jedes einzelne Photon besitzt die Energie

$$E \;=\; h \cdot \nu \;=\; h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Dabei ist ν die Frequenz und λ die Wellenlänge des nach Voraussetzung monochromatischen (nur eine Wellenlänge) Lichts. Weiter ist $c = \lambda/T = \lambda \cdot \nu$ die Lichtgeschwindigkeit (mit der Periodendauer T), die im Vakuum unabhängig von der Wellenlänge ist und durch

$$c \;\approx\; 300'000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \;=\; 3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

approximiert werden kann. Das Plancksche Wirkungsquantum h hat den Wert

$$h \;\approx\; 6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$$

Ein Photon mit Wellenlänge 600 Nanometer hat also die Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{photon}} &= h \cdot \frac{c}{\lambda} \\ &\approx 6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,\frac{3 \times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{600 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} \\ &= 3.3 \times 10^{-34} \times 10^{+15}\,\mathrm{J} \;=\; 3.3 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{1}$$

Wenn wir 100 Joule haben, sind das dann also

$$\begin{aligned} n_{\text{photons}} &\approx \frac{100\,\mathrm{J}}{3.3 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}} \\ &\approx \frac{3}{10} \times 10^{+21} \;=\; 3 \times 10^{+20} \end{aligned} \tag{2}$$

Photonen.

b) Besteht zwischen zwei Elektroden, zwei elektrisch leitfähigen Platten, eine Spannung U, dann sind diese Platten elektrisch geladen und sie erzeugen ein elektrisches Feld $E = F/q = U/d$. Dabei ist d der Plattenabstand und F ist die Kraft, die auf eine Probeladung q in diesem elektrischen Feld ausgeübt wird. Durchläuft eine solche Probeladung dann die Strecke d, wird an dieser die Arbeit (ist dasselbe wie Energie, wir nehmen jetzt den Buchstaben W für 'work', da das E schon für das elektrische Feld verbraucht ist)

$$W \;=\; \text{Kraft} \times \text{Weg} \;=\; F \cdot d \;=\; qE \cdot d \;=\; q \cdot U$$

verrichtet. Ein Elektronenvolt, $1\,\mathrm{eV}$, ist nun die kinetische Energie, die ein Elektron bekommt, wenn es eine Beschleunigungsspannung von einem Volt durchlaufen hat. Also

$$1\,\mathrm{eV} \;=\; e \cdot 1\,\mathrm{V} \tag{3}$$

Dabei bezeichnet das e in (3) also die Elementarladung des Elektrons. In SI-Einheiten ist die gegeben durch

$$e \;\approx\; 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{4}$$

wobei $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{Coulomb}$ die SI-Einheit für die Ladung ist. Für diese gilt

$$1\,\mathrm{Volt} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{Joule}}{\mathrm{Coulomb}}$$

so dass wir also

$$1\,\mathrm{eV} \;=\; e \cdot 1\,\mathrm{V} \;\approx\; 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{5}$$

bekommen. Damit ist die Energie (1) eines einzelnen Photons der Wellenlänge 600 Nanometer gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\text{photon}} &\approx 3.3 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \\ &\approx \frac{3.3 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}}\,\mathrm{eV} \\ &\approx 2\,\mathrm{eV} \end{aligned} \tag{6}$$

Aufgabe 2: a) Nach der de Broglie Beziehung kann jedem materiellen Teilchen mit klassischem Impuls p eine Wellenlänge λ zugeordnet werden, die durch die Formel $\lambda = h/p$ gegeben ist, h das Plancksche Wirkungsquantum. Damit bekommen wir (wir rechnen wieder mit einer Stelle nach dem Komma)

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 E}} \\ &\approx \frac{6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js} \;\cdot\; 3 \times 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\left(2 \cdot 511 \times 10^{3}\,\mathrm{eV} \;\cdot\; 600\,\mathrm{eV}\right)^{1/2}} \\ &\approx \frac{18 \cdot 1.1 \times 10^{-26}\,\mathrm{Jm}}{\sqrt{6} \times 10^{4}\,\mathrm{eV}} \\ &\approx \frac{\sqrt{6} \cdot 3.3 \times 10^{-30}\,\mathrm{Jm}}{1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}} \\ &\approx 50.5 \times 10^{-12}\,\mathrm{m} \;=\; 50.5\,\mathrm{pm} \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Einheit 1 Pikometer $= 1\,\mathrm{pm} \;=\; 10^{-12}\,\mathrm{m}$ benutzt haben.

2b) Wir rechnen nichtrelativistisch und schreiben $E = E_{\text{kin}} = m_e v^2/2$. Die Geschwindigkeit der Elektronen ist dann

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m_e c^2}} \times c \\ &\approx \sqrt{\frac{1200\,\text{eV}}{511\,\text{keV}}} \times c \\ &\approx \sqrt{\frac{2400\,\text{eV}}{10^6\,\text{eV}}} \times c \\ &\approx \sqrt{24} \times 10^{-2} \times 3 \times 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 14.7 \times 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

In einer Sekunde legen die Elektronen also eine Strecke von etwa 14700 Kilometern zurück. Wenn der zeitliche Abstand zwischen zwei Elektronen also in etwa 1 Sekunde beträgt, kann man davon ausgehen, dass sich im Interferenzbereich immer nur ein einziges Elektron befindet. Trotzdem ergibt sich das typische Doppelspalt-Interferenzmuster, die Elektronen interferieren sozusagen mit sich selber. Das lässt sich formal nur dadurch beschreiben, dass man dem Elektron ein ausgedehntes mathematisches Objekt zuordnet, eine Wellenfunktion oder Wahrscheinlichkeitsamplitude $\psi(\vec{x}, t)$, so dass

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2\, d^3x$$

dann als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden kann, das Elektron zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ im Volumenelement d^3x zu treffen.

c) Die Position des ersten Minimums ist gegeben durch die erste Nullstelle des Cosinus,

$$\cos\beta \stackrel{!}{=} 0$$

Also,

$$\frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} \beta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta$$

oder

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2b}$$

Bezeichnen wir mit x den Abstand vom Zentrum des Detektors (gegeben durch $\theta = 0$) zum aktuellen Punkt, wo die Intensität gemessen wird, gilt näherungsweise, da das θ sehr klein ist,

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x}{L}$$

Die Position des ersten Minimums ist dann also gegeben durch

$$\begin{aligned}
x_{\text{1st min}} &\approx L\sin\theta \;=\; \frac{\lambda L}{2b} \\
&\overset{a)}{\approx} \frac{50.5\times 10^{-12}\,\mathrm{m}\times 0.24\,\mathrm{m}}{2\times 272\times 10^{-9}\,\mathrm{m}} \\
&\approx \frac{12}{2\times 272}\times 10^{-3}\,\mathrm{m} \\
&\approx 0.022\times 10^{-3}\,\mathrm{m} \;=\; 22\times 10^{-6}\,\mathrm{m} \;=\; 22\,\mu\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Der Abstand zum ersten Minimum beträgt also 22 Mikrometer und das stimmt im wesentlichen mit den Zahlen in der Abbildung der Intensitätsverteilung überein.