

week9: Kapitel 2.5.2: Das Brachistochronen-Problem

Eine Perle oder ein Kügelchen der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, -mg)$ reibungsfrei auf einem Draht in der (x, z) -Ebene. Der Draht werde durch eine Funktion $z = f(x)$ beschrieben und verbinde die Punkte $P_1 = (0, h)$ und $P_2 = (\ell, 0)$. Wir haben also ein Problem mit einem Freiheitsgrad und wir wählen x als die verallgemeinerte Koordinate. Auf dem letzten Übungsblatt 8 hatten wir die folgende Formel für die Zeit T hergeleitet, die das Kügelchen braucht, um vom Startpunkt $(0, h)$ bis zum Endpunkt $(\ell, 0)$ zu gelangen, sie war gegeben durch

$$T = T(q) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\frac{1+q'(x)^2}{q(x)}} dx \quad (1)$$

Dabei hatten wir das $f(x)$ durch das $q(x)$ ersetzt gemäss

$$q(x) := h - f(x), \quad q'(x) = -f'(x). \quad (2)$$

Wir wollen jetzt dasjenige $f(x)$ oder $q(x)$ bestimmen, für welches die Durchlaufzeit T oder das folgende Integral $I = I(q)$ minimal ist:

$$I(q) := \int_0^\ell L(q(x), q'(x)) dx \xrightarrow{!} \min \quad (3)$$

mit der Funktion

$$L(q, q') = \sqrt{\frac{1+q'(x)^2}{q(x)}} \quad (4)$$

Nach dem Theorem 2.5.1 aus dem week8.pdf (das t ist dann hier das x) ist notwendige Bedingung für ein Minimum das Bestehen der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (5)$$

Da wir eine Euler-Lagrange-Gleichung haben und das L nicht explizit von dem x abhängt, können wir ebenfalls das Theorem 2.5.2 aus dem week8.pdf anwenden und bekommen, dass die Funktion

$$H(q, q') := \frac{\partial L}{\partial q'} q' - L \quad (6)$$

konstant ist, sie ist unabhängig von $x \in [0, \ell]$.

Beh.1: Es gilt

$$H(q, q') = - \frac{1}{\sqrt{q(x)[1 + q'(x)^2]}} = \text{constant} =: - \frac{1}{\sqrt{c}} \quad (7)$$

Bew.1: Mit

$$L(q, q') = \sqrt{\frac{1+q'(x)^2}{q(x)}} \quad (8)$$

bekommen wir

$$\frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{2q'(x)}{2\sqrt{1+q'(x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{q'(x)}{\sqrt{1+q'(x)^2}}$$

und damit

$$\begin{aligned} H(q, q') &:= \frac{\partial L}{\partial q'} q' - L \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \sqrt{1+q'(x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{1+q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \frac{-1}{\sqrt{1+q'(x)^2}} = \text{constant} \end{aligned} \quad (9)$$

Beh.2: Anstatt x als Parameter wollen wir das x durch einen neuen Parameter t ausdrücken, $x = x_t$, und das $q(x_t)$ wollen wir y_t nennen, also

$$x = x_t \quad (10)$$

$$q(x) = q(x_t) = y_t \quad (11)$$

Dann ist (7) äquivalent zu

$$y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = c\dot{x}^2 \quad (12)$$

Bew.2: Wir haben

$$\begin{aligned} y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= c\dot{x}^2 \\ \Leftrightarrow y\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right) &= c \\ \Leftrightarrow y\left(1 + \left\{\frac{dy/dt}{dx/dt}\right\}^2\right) &= c \\ \Leftrightarrow y\left(1 + \left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2\right) &= c \\ \stackrel{y=q(x)}{\Leftrightarrow} q(x)\left(1 + \{q'(x)\}^2\right) &= c \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{q(x)[1+q'(x)^2]}} &= -\frac{1}{\sqrt{c}} \end{aligned}$$

Beh.3: Die Gleichung (12) wird gelöst durch

$$x_t = \frac{c}{2} [2t - \sin(2t)] \quad (13)$$

$$y_t = \frac{c}{2} [1 - \cos(2t)] \quad (14)$$

wobei das c und der Parameterbereich für das $t \in [0, t_{\text{end}}]$, also das t_{end} , durch die Randbedingungen

$$(x_0, y_0) = (0, 0) \quad (15)$$

$$(x_{t_{\text{end}}}, y_{t_{\text{end}}}) = (\ell, h) \quad (16)$$

geeignet festzulegen sind.

Bew.3: Mit

$$x_t = \frac{c}{2} [2t - \sin(2t)]$$

$$y_t = \frac{c}{2} [1 - \cos(2t)]$$

bekommen wir

$$\dot{x}_t = \frac{c}{2} [2 - 2\cos(2t)] = c [1 - \cos(2t)]$$

$$\dot{y}_t = \frac{c}{2} [0 + 2\sin(2t)] = c \sin(2t)$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= c^2 \{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t) + \sin^2(2t)\} \\ &= 2c^2 \{1 - \cos(2t)\} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} y(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) &= \frac{c}{2} [1 - \cos(2t)] \times 2c^2 \{1 - \cos(2t)\} \\ &= c^3 [1 - \cos(2t)]^2 = c \dot{x}^2 \end{aligned}$$

Schauen wir uns die Randbedingungen

$$(x_0, y_0) \stackrel{!}{=} (0, 0) \quad (17)$$

$$(x_{t_{\text{end}}}, y_{t_{\text{end}}}) \stackrel{!}{=} (\ell, h) \quad (18)$$

an. Gleichung (17) ist offensichtlich automatisch erfüllt, für beliebiges c und t_{end} . Aus Gleichung (18) ergibt sich

$$x_{t_{\text{end}}} = \frac{c}{2} [2t_{\text{end}} - \sin(2t_{\text{end}})] \stackrel{!}{=} \ell \quad (19)$$

$$y_{t_{\text{end}}} = \frac{c}{2} [1 - \cos(2t_{\text{end}})] \stackrel{!}{=} h \quad (20)$$

Wir können etwa das c eliminieren, indem wir (20) durch (19) teilen,

$$\frac{y_{t_{\text{end}}}}{x_{t_{\text{end}}}} = \frac{1 - \cos(2t_{\text{end}})}{2t_{\text{end}} - \sin(2t_{\text{end}})} \stackrel{!}{=} \frac{h}{\ell} \quad (21)$$

Aus Gleichung (21) bekommen wir das t_{end} und aus (19) oder (20) dann das c .

Schauen wir uns einen konkreten Fall an. Wählen wir etwa

$$\begin{aligned}h &= 20 \text{ cm} \\ \ell &= 100 \text{ cm}\end{aligned}$$

Wir plotten die Hilfsfunktion, das ist der Ausdruck in (21) minus der rechten Seite,

$$g(t) := \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)} - \frac{h}{\ell} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)} - \frac{1}{5}$$

und tun dann einfach die Nullstelle (oder die Nullstellen..) davon graphisch bestimmen, das ist dann das t_{end} . Kann man etwa auf einem Excelsheet machen.

Tatsächlich findet man 3 Nullstellen und damit 3 verschiedene Lösungen für (c, t_{end}) . Möglicherweise sind die anderen beiden Lösungen dann stationäre Punkte für das Funktional (1) oder (3) von oben, also so ähnlich wie $x = 0$ ein stationärer Punkt für die Funktion $y(x) = x^3$ ist, die erste Ableitung ist 0, aber es ist kein Minimum. Ok, wir tun das hier nicht weiter analysieren. Alle 3 Lösungen sind auf dem Excelsheet geplottet.