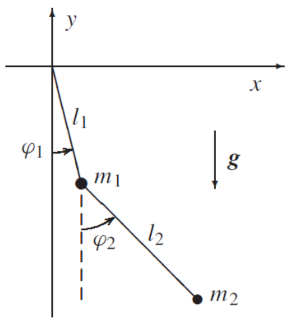
week6: Beispiele zu Kapitel 2.3: Die Euler-Lagrange Gleichungen für das Doppelpendel und Systeme von gekoppelten Oszillatoren, Teil1

Wir wollen uns zunächst das Beispiel 2 aus der letzten Vorlesung etwas genauer anschauen, das war das Doppelpendel. Wir stellen die Lagrange-Funktion auf und können dann aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen herleiten. Obwohl wir hier gerade mal 2 Teilchen haben, sind die Bewegungsgleichungen schon ziemlich kompliziert und lassen sich nicht mehr analytisch lösen. Mehr noch, für grosse Auslenkungen zeigt das Doppelpendel chaotisches Verhalten, also sehr sehr kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen führen nach kurzer Zeit schon zu sehr unterschiedlichen Bahnverläufen.

Für kleine Auslenkungen mit kleinen Geschwindigkeiten lässt sich das System linearisieren und man erhält ein System von zwei gekoppelten Oszillatoren. Mathematisch, konzeptionell, unterscheidet sich ein System von zwei gekoppelten Oszillatoren kaum von einem System mit n Oszillatoren, so dass wir also das Beispiel eines linearisierten Doppelpendels dann gleich als Motivation für die Diskussion eines Systems von n gekoppelten Oszillatoren benutzen können.

Das Doppelpendel: Schauen wir uns also zunächst das Doppelpendel genauer an: Das ebene Doppelpendel unter dem Einfluss der Schwerkraft sieht so aus,



Wir haben also zwei Massen m_1 und m_2 im $\mathbb{R}^2$, mit kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \\ \vec{x}_2 &= (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

und den 2 Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 &= 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

wobei also ℓ_1 und ℓ_2 jeweils die Pendellänge ist. Das Potential ist

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = m_1 g\, y_1 + m_2 g\, y_2$$

Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir die Winkel φ_1 und φ_2 wie in der Abbildung. Die Winkel werden also gegen die negative y-Achse gemessen, das ist also ein kleines bischen anders als bei den Standard-Polarkoordinaten, wo die Winkel ja gegen die positive x-Achse gemessen werden, aber das können wir ja so upsetten wie wir wollen. Wir bekämen dann also die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_1 &= \tfrac{x_1}{\ell_1} \\
\cos\varphi_1 &= \tfrac{-y_1}{\ell_1} \\
\sin\varphi_2 &= \tfrac{x_2-x_1}{\ell_2} \\
\cos\varphi_2 &= \tfrac{-(y_2-y_1)}{\ell_2}
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \ell_1 \sin\varphi_1 \\
y_1 &= -\ell_1 \cos\varphi_1 \\
x_2 - x_1 &= \ell_2 \sin\varphi_2 \\
y_2 - y_1 &= -\ell_2 \cos\varphi_2
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
x_2 &= \ell_2 \sin\varphi_2 + \ell_1 \sin\varphi_1 \\
y_2 &= -\ell_2 \cos\varphi_2 - \ell_1 \cos\varphi_1
\end{aligned}$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \ell_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \\
\dot{y}_1 &= \ell_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \\
\dot{x}_2 &= \ell_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \\
\dot{y}_2 &= \ell_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1
\end{aligned}$$

Also erhalten wir für die kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
T &= \tfrac{m_1}{2}\,\dot{\vec{x}}_1^{\,2} + \tfrac{m_2}{2}\,\dot{\vec{x}}_2^{\,2} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\left\{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right\} + \tfrac{m_2}{2}\left\{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{\left[\ell_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1\right]^2 + \left[\ell_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 + \ell_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1\right]^2\right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{\ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + \ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + 2\ell_2\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2\,\ell_1\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + 2\ell_2\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2\,\ell_1\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1\right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{\ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + \ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + 2\,\ell_1\ell_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2]\right\} \\
&= \tfrac{m_1}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{\ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + \ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + 2\,\ell_1\ell_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\;\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right\} \\
&= \tfrac{m_1+m_2}{2}\,\ell_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\left\{\ell_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 + 2\,\ell_1\ell_2\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\;\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right\}
\end{aligned}$$

Und für die potentielle Energie bekommen wir

$$\begin{aligned} V &= m_1 g\, y_1 + m_2 g\, y_2 \\ &= -m_1 g\, \ell_1 \cos\varphi_1 - m_2 g(\ell_2 \cos\varphi_2 + \ell_1 \cos\varphi_1) \\ &= -(m_1+m_2) g\, \ell_1 \cos\varphi_1 - m_2 g\, \ell_2 \cos\varphi_2 \end{aligned}$$

Also ist die Lagrange-Funktion gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} \\ &= T - V \\ &= \tfrac{m_1+m_2}{2}\, \ell_1^2\, \dot\varphi_1^2 + \tfrac{m_2}{2}\, \ell_2^2\, \dot\varphi_2^2 + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + (m_1+m_2) g\, \ell_1 \cos\varphi_1 + m_2 g\, \ell_2 \cos\varphi_2 \qquad (1) \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Euler-Lagrange-Gleichungen aufstellen: Wir haben

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= -\, m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1+m_2) g\, \ell_1 \sin\varphi_1 \\ \tfrac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= +\, m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g\, \ell_2 \sin\varphi_2 \\ \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} &= (m_1+m_2)\, \ell_1^2\, \dot\varphi_1 + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} &= m_2\, \ell_2^2\, \dot\varphi_2 + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} &= (m_1+m_2)\, \ell_1^2\, \ddot\varphi_1 + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2\, (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} &= m_2\, \ell_2^2\, \ddot\varphi_2 + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1\, (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

Damit lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} - \tfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} \\ &= (m_1+m_2)\, \ell_1^2\, \ddot\varphi_1 + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2\, (\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1+m_2) g\, \ell_1 \sin\varphi_1 \\ &= (m_1+m_2)\, \ell_1^2\, \ddot\varphi_1 + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \ddot\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2\, \ell_1 \ell_2\, \dot\varphi_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + (m_1+m_2) g\, \ell_1 \sin\varphi_1 \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi_2} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial\varphi_2} \\
&=\; m_2\,\ell_2^2\,\ddot\varphi_2 \;+\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\ddot\varphi_1\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;-\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\dot\varphi_1\,(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \\
&\qquad -\, m_2\,\ell_1\ell_2\,\dot\varphi_1\dot\varphi_2\;\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; m_2 g\,\ell_2\,\sin\varphi_2 \\
&=\; m_2\,\ell_2^2\,\ddot\varphi_2 \;+\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\ddot\varphi_1\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;-\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\dot\varphi_1^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; m_2 g\,\ell_2\,\sin\varphi_2
\end{aligned}
$$

Wir teilen beide Gleichungen durch m_2, teilen die erste Gleichung durch ℓ_1 und die zweite Gleichung durch ℓ_2, und bekommen:

$$\big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,\ell_1\,\ddot\varphi_1 \;+\; \ell_2\,\ddot\varphi_2\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; \ell_2\,\dot\varphi_2^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; \big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big) g\,\sin\varphi_1 \;=\; 0 \tag{2}$$

$$\ell_2\,\ddot\varphi_2 \;+\; \ell_1\,\ddot\varphi_1\;\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;-\; \ell_1\,\dot\varphi_1^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; g\,\sin\varphi_2 \;=\; 0 \tag{3}$$

Kleine Auslenkungen und Geschwindigkeiten: Linearisiertes Doppelpendel

Erinnern Sie sich an die Reihenentwicklungen

$$\sin x \;=\; x \;-\; \tfrac{x^3}{3!} \;+\; \tfrac{x^5}{5!} \;-\; \tfrac{x^7}{7!} \;\pm\; \cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{4}$$

$$\cos x \;=\; 1 \;-\; \tfrac{x^2}{2!} \;+\; \tfrac{x^4}{4!} \;-\; \tfrac{x^6}{6!} \;\pm\; \cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\tfrac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{5}$$

die wir nacher bei den n gekoppelten Oszillatoren auch nochmal benutzen werden (dann ohne Approximationen). Für kleine $x \ll 1$ approximieren wir

$$
\begin{aligned}
\sin x \;&\approx\; x \\
\cos x \;&\approx\; 1
\end{aligned}
$$

Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeiten $\dot\varphi_1$ und $\dot\varphi_2$ ebenfalls klein sind, so dass wir die Terme $\dot\varphi_i^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2)$ als klein gegenüber den first order terms betrachten können. Sprich: Wir lassen die einfach weg. Aus (2) und (3) erhalten wir dann das System

$$\big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,\ell_1\,\ddot\varphi_1 \;+\; \ell_2\,\ddot\varphi_2 \;+\; \big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big) g\,\varphi_1 \;=\; 0 \tag{6}$$

$$\ell_2\,\ddot\varphi_2 \;+\; \ell_1\,\ddot\varphi_1 \;+\; g\,\varphi_2 \;=\; 0 \tag{7}$$

oder

$$\begin{pmatrix}\big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot\varphi_1\\ \ddot\varphi_2\end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix}\big(1+\tfrac{m_1}{m_2}\big)\,g & 0 \\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{8}$$

Gleichung (8) ist ein Beispiel für ein System von 2 gekoppelten Oszillatoren. Dabei wollen wir ein System von n gekoppelten Oszillatoren definieren als ein System, welches durch das folgende System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann:

$$T\,\ddot{x} \;+\; V\,x \;\;=\;\; 0 \tag{9}$$

Dabei ist

$$x \;=\; x_t \;\;=\;\; \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \;\;\in\;\; \mathbb{R}^n \tag{10}$$

ein Vektor mit n Funktionen von der Zeit, wobei $x_i(t)$ die Bewegung des i-ten Oszillators beschreibt. T und V sind $n \times n$ Matrizen,

$$T \;\in\; \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad V \;\in\; \mathbb{R}^{n\times n} \tag{11}$$

deren Einträge T_{jk} und V_{jk} nicht von der Zeit abhängen. Für das linearisierte Doppelpendel haben wir also $n = 2$,

$$x \;\;=\;\; \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

und

$$T \;\;=\;\; \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\ell_1 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$V \;\;=\;\; \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \;\;. \tag{14}$$

Allgemeine Lösung für n gekoppelte Oszillatoren:

..machen wir nächste Woche.