week5: Die Euler-Lagrange Gleichungen der klassischen Mechanik
Kapitel 2.3: Herleitung mit Zwangskräften, N Teilchen

Wir wollen jetzt die Überlegungen aus dem `week3.pdf`, auf N-Teilchen Systeme übertragen. Wir beschreiben zunächst das allgemeine Setting und geben dann zwei Beispiele an, N geladene Kügelchen in einer Schüssel und das Doppelpendel, für die dieses Setting etwa gedacht wäre. Am Ende fassen wir die Ergebnisse in dem Theorem 2.3.2 zusammen.

Wir betrachten also N Teilchen mit Massen $m_1, m_2, \cdots, m_N$ und Ortsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \cdots, \vec{x}_N \in \mathbb{R}^3$, die sich unter dem Einfluss eines Potentials

$$V \;=\; V(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) \tag{1}$$

bewegen. Durch das Potential V wird eine Kraft

$$\vec{F}_i \;=\; -\nabla_{\vec{x}_i} V \tag{2}$$

auf das i-te Teilchen ausgeübt.

Die Bewegung der N Teilchen sei nicht völlig frei, sondern sie unterliege mechanischen Restriktionen. Diese Zwangsbedingungen seien gegeben die durch die n (nicht redundanten, linear unabhängigen) Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) &= 0 \\ &\vdots \\ g_n(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Wenn wir die Ortsvektoren der N Teilchen in dem Vektor

$$\vec{x} \;:=\; (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) \;\in\; \mathbb{R}^{3N}$$

zusammenfassen, dann findet die Bewegung also auf einer

$$f \;:=\; 3N - n \tag{4}$$

dimensionalen Fläche $\mathcal{F}$ oder Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{3N}$ statt, mit

$$\mathcal{F} \;:=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{3N} \mid g_j(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) = 0 \; \forall\, j = 1, ..., n \right\} \;\subset\; \mathbb{R}^{3N} \tag{5}$$

Jede Parametrisierung von $\mathcal{F}$ durch f unabhängige Koordinaten

$$q \;=\; (q_1, \cdots, q_f) \tag{6}$$

definiert die verallgemeinerten Koordinaten für das gegebene mechanische Problem. Das heisst, die kartesischen Koordinaten $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_N$ sind so durch die $q_1, ..., q_f$ auszudrücken,

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \vec{x}_1(q_1, q_2, \cdots, q_f) &= \vec{x}_1(q) \\ &\vdots \\ \vec{x}_N &= \vec{x}_N(q_1, q_2, \cdots, q_f) &= \vec{x}_N(q) \end{aligned} \tag{7}$$

so dass die Zwangsbedingungen (3) automatisch erfüllt sind:

$$\begin{aligned} g_1\big(\vec{x}_1(q), \cdots, \vec{x}_N(q)\big) &= 0 \\ &\vdots \\ g_n\big(\vec{x}_1(q), \cdots, \vec{x}_N(q)\big) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Das $\mathcal{F}$ wird also durch die verallgemeinerten Koordinaten $q = (q_1, \cdots, q_f)$ parametrisiert und die Vektoren

$$\tfrac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}\,, \quad \cdots \quad , \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial q_f} \tag{9}$$

sind linear unabhängige Tangentialvektoren an $\mathcal{F}$. Wir können diese Vektoren zu einer Basis von $\mathbb{R}^{3N}$ erweitern, indem wir die $3N - f = 3N - (3N - n) = n$ Gradienten

$$\nabla_{\vec{x}}\, g_1\,,\ \cdots\ ,\ \nabla_{\vec{x}}\, g_n \tag{10}$$

mit hinzunehmen,

$$\mathcal{B} \;=\; \left\{ \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}\,, \cdots, \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial q_f}\,, \nabla_{\vec{x}} g_1\,, \cdots, \nabla_{\vec{x}} g_n \right\} \tag{11}$$

ist eine Basis des $\mathbb{R}^{3N}$ und die Gradienten stehen senkrecht auf den Tangentialvektoren, denn: wir leiten die k-te Gleichung von (8) nach q_j ab und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial}{\partial q_j}\, g_k\big(\vec{x}_1(q), \cdots, \vec{x}_N(q)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\vec{x}_i}\, g_k\big(\vec{x}_1(q), \cdots, \vec{x}_N(q)\big)\, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \nabla_{\vec{x}}\, g_k\, \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{12}$$

In der zweiten Zeite von (12) haben wir eine Summe von Skalarprodukten im $\mathbb{R}^3$, die letzte Zeile von (12) ist gegeben durch ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^{3N}$.

Bevor wir die Bewegungsgleichungen hinschreiben, wollen wir eben zwei Beispiele angeben, für die dieses Setting etwa gedacht ist.

Beispiel 1: *N elektrostatisch geladene Kügelchen in einer halbkugelförmigen Schüssel unter dem Einfluss der Schwerkraft:* In diesem Fall wäre das Potential gegeben durch

$$V(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) \;=\; \sum_{i=1}^{N} mg\, z_i \;+\; \tfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \tfrac{Q_i Q_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|}$$

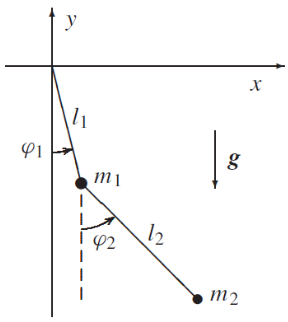
wenn die $Q_1, ..., Q_N$ die Ladungen der Kügelchen sind und etwa $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Wir haben $n = N$ Zwangsbedingungen, die durch die Gleichungen

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \;-\; R^2 \;=\; 0 \qquad \forall\, i = 1, \cdots, N$$

gegeben sind, wenn R der Schüsselradius ist. Die Fläche $\mathcal{F}$ wäre also $f = 3N - N = 2N$ dimensional und als Parametrisierung könnten wir einfach jeweils die Winkel der Kugelkoordinaten nehmen,

$$(q_1, q_2, \cdots, q_{2N-1}, q_{2N}) \;=\; (\varphi_1, \theta_1, \cdots, \varphi_N, \theta_N)\;.$$

Beispiel 2: Das ebene Doppelpendel unter dem Einfluss der Schwerkraft: Das sieht also so aus,



Hier haben wir also ein ebenes Pendel, kein sphärisches im $\mathbb{R}^3$ wie letzte Woche, mit

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= (x_1, y_1) \;\in\; \mathbb{R}^2\\ \vec{x}_2 &= (x_2, y_2) \;\in\; \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

mit den $n = 2$ Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 \;-\; \ell_1^2 &= 0\\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \;-\; \ell_2^2 &= 0\end{aligned}$$

wobei also ℓ_1 und ℓ_2 jeweils die Pendellänge ist. Das Potential ist

$$V(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \;=\; m_1 g\, y_1 \;+\; m_2 g\, y_2$$

Die Fläche $\mathcal{F}$ ist $f = 2N - n = 4 - 2 = 2$ dimensional und als verallgemeinerte Koordinaten kämen die Winkel φ_1 und φ_2 aus der Abbildung in Frage.

Zurück zum allgemeinen Setting, Bewegungsgleichungen:

Wie sehen die Bewegungsgleichungen aus? Auf das N-Teilchen System wirken Kräfte, die durch das Potential V generiert werden, und Zwangskräfte:

$$m_i\, \ddot{\vec{x}}_i \;=\; \vec{F}_i \;+\; \vec{Z}_i$$

oder

$$m_i\, \ddot{\vec{x}}_i \;+\; \nabla_{\vec{x}_i} V \;=\; \vec{Z}_i \tag{13}$$

Fassen wir die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ zu einem Vektor im $\mathbb{R}^{3N}$ zusammen,

$$\vec{Z} \;:=\; (\vec{Z}_1, \cdots, \vec{Z}_N) \tag{14}$$

dann darf das $\vec{Z}$ keine tangentiale Komponente an $\mathcal{F}$ haben. Also, wenn wir die Basis $\mathcal{B}$ aus (11) benutzen,

$$\vec{Z} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \nabla_{\vec{x}}\, g_k \tag{15}$$

mit gewissen Funktionen $\lambda_k = \lambda_k(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$. Die Zwangskraft für das i-te Teilchen ist dann also gegeben durch

$$\vec{Z}_i \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \nabla_{\vec{x}_i}\, g_k \tag{16}$$

und die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \, \ddot{\vec{x}}_i + \nabla_{\vec{x}_i} V \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \nabla_{\vec{x}_i} g_k \tag{17}$$

Wir multiplizieren (17) mit $\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$ und summieren über i

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N} m_i \, \ddot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\vec{x}_i} V \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\vec{x}_i}\, g_k \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{N} m_i \, \ddot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \tfrac{\partial V}{\partial q_j} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\nabla_{\vec{x}}\, g_k \, \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial q_j}}_{=\,0} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{N} m_i \, \ddot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} + \tfrac{\partial V}{\partial q_j} \;=\; 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Wegen

$$\dot{\vec{x}}_i \;=\; \sum_{j=1}^{f} \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \, \dot{q}_j \tag{19}$$

können wir die kinetische Energie T wieder (wie in `week3.pdf` mit den $u, v, \dot{u}, \dot{v}$) als eine Funktion der q_j und der $\dot{q}_j$ auffassen,

$$\begin{aligned}
T \;=\; T(q, \dot{q}) \;&=\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{m_i}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \\
&\overset{(19)}{=} \sum_{j,k=1}^{f} \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_{i=1}^{N} \tfrac{m_i}{2} \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \\
&=\; \sum_{j,k=1}^{f} \dot{q}_j \dot{q}_k \, t_{jk}(q)
\end{aligned} \tag{20}$$

mit

$$t_{jk}(q) \;\; := \;\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{m_i}{2} \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \tag{21}$$

Dann gilt die folgende Aussage, die wir fast wortwörtlich aus dem Theorem 2.1.1 aus dem `week3.pdf` abschreiben können:

Theorem 2.3.1: Es sei $\vec{x} = \vec{x}(q)$ eine Parametrisierung von $\mathcal{F}$, $\vec{x}_t = \vec{x}(q_t)$ und die Funktion $T = T(q, \dot{q})$ sei gegeben durch (20). Dann gilt

$$\bigl(\tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \; - \; \tfrac{\partial}{\partial q_j} \bigr) \bigl\{ \tfrac{m_i}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \bigr\} \;\; = \;\; m_i \ddot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \tag{22}$$

für alle $j = 1, 2, ..., f$. Insbesondere gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \ddot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \;\; = \;\; \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \; - \; \tfrac{\partial T}{\partial q_j} \tag{23}$$

mit der kinetischen Energie

$$T \;\; = \;\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{m_i}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \;\; = \;\; \sum_{j,k=1}^{f} \dot{q}_j \dot{q}_k \, t_{jk}(q) \tag{24}$$

und $t_{jk}(q)$ wie in (21) angegeben.

Beweis: Mit

$$\dot{\vec{x}}_i \;\; = \;\; \sum_{k=1}^{f} \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \, \dot{q}_k \tag{25}$$

bekommen wir

$$\tfrac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \bigl\{ \tfrac{1}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \bigr\} \;\; = \;\; \dot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial \dot{q}_j} \;\; \overset{(25)}{=} \;\; \dot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

und damit

$$\tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \bigl\{ \tfrac{1}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \bigr\} \;\; = \;\; \ddot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \;\; + \;\; \dot{\vec{x}}_i \, \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

Andererseits,

$$\tfrac{\partial}{\partial q_j} \bigl\{ \tfrac{1}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \bigr\} \;\; = \;\; \dot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q_j} \;\; \overset{(25)}{=} \;\; \dot{\vec{x}}_i \sum_{k=1}^{f} \tfrac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q_k \partial q_j} \, \dot{q}_k \;\; = \;\; \dot{\vec{x}}_i \, \tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

Also,

$$\tfrac{d}{dt} \tfrac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \bigl\{ \tfrac{1}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \bigr\} \; - \; \tfrac{\partial}{\partial q_j} \bigl\{ \tfrac{1}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \bigr\} \;\; = \;\; \ddot{\vec{x}}_i \, \tfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Mit Hilfe von Theorem 2.3.1 können wir also das System (18) schreiben als

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \; - \; \tfrac{\partial T}{\partial q_j} \; + \; \tfrac{\partial V}{\partial q_j} \;\; = \;\; 0 \tag{26}$$

oder

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \; - \; \tfrac{\partial (T-V)}{\partial q_j} \;\; = \;\; 0 \tag{27}$$

Da nach Voraussetzung das V nur von den $\vec{x}_i$ aber nicht von den $\dot{\vec{x}}_i$ abhängt, ist $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ und wir können schliesslich schreiben

$$\tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} \; - \; \tfrac{\partial (T-V)}{\partial q_j} \;\; = \;\; 0 \tag{28}$$

Wir fassen unsere Ergebnisse wieder (analog zum Theorem 2.1.2 aus dem `week3.pdf`) in einem Theorem zusammen.

Theorem 2.3.2: Ein N-Teilchensystem bewege sich unter dem Einfluss eines Potentials $V = V(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N)$. Durch das Potential werde die Kraft

$$\vec{F}_i \;\; = \;\; -\nabla_{\vec{x}_i} V(\vec{x})$$

auf das i-te Teilchen ausgeübt. Weiterhin unterliege das Teilchensystem mechanischen Beschränkungen, die dazu führen, dass die Bewegung nur in einer f-dimensionalen Fläche

$$\mathcal{F} \;\; = \;\; \left\{ \; \vec{x} = (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \; \middle| \; g_j(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) = 0 \quad \forall \, j = 1, ..., n \; \right\} \;\; \subset \;\; \mathbb{R}^{3N}$$

stattfinden kann. Dann gilt:

a) Die Bahnkurven $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_i(q_t)$ genügen den Bewegungsgleichungen

$$m_i \, \ddot{\vec{x}}_i \; + \; \nabla_{\vec{x}_i} V(\vec{x}) \;\; = \;\; \vec{Z}_i$$

mit den Zwangskräften

$$\vec{Z}_i \;\; = \;\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}) \; \nabla_{\vec{x}_i} \, g_k(\vec{x})$$

Die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ sind reale Kräfte, nicht nur ein mathematisches Hilfsmittel.

b) Definieren wir die Lagrange-Funktion L durch

$$L \;\; := \;\; T \, - \, V \;\; = \;\; \textstyle\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \, \dot{\vec{x}}_i^2 \;\; - \;\; V(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) \tag{29}$$

dann können die Bahnkurven der verallgemeinerten Koordinaten $q_1(t), ..., q_f(t)$ und damit auch die Bahnkurven in kartesischen Koordinaten $\vec{x}_i(t) = \vec{x}_i\big(q_1(t), \cdots, q_f(t)\big)$ aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \; - \; \frac{\partial L}{\partial q_j} \;\; = \;\; 0 \tag{30}$$

gewonnen werden.

Bemerkungen:

1) Zum Aufstellen und Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen (30), also zum Berechnen der Bahnkurven, ist die Kenntnis der Zwangskräfte $\vec{Z}_i$ nicht erforderlich. Der relevante Teil von dem Theorem ist also typischerweise der Teil (b), der Teil (a) ist 'nur zur Info', nur zum besseren Verständnis sozusagen.

2) Die Parameter $q_t = \big(q_1(t), \cdots, q_f(t)\big)$ (oder jede Auswahl von solchen Parametern), die die Zwangsbedingungen

$$\vec{x} \;=\; \vec{x}(q_t) \;\;\in\;\; \mathcal{F}$$

sicherstellen, heissen **verallgemeinerte Koordinaten** für das gegebene mechanische Problem.

3) Das Theorem gilt auch für den Fall $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{3N}$, also für den Fall, dass es überhaupt keine Zwangsbedingungen gibt. Es sagt dann aus, dass die Bewegungsgleichungen in beliebigen Koordinaten immer von der Form (30) sind. Während etwa $m\,\ddot{\vec{x}} = 0$ oder $m\ddot{x} = 0$ und $m\ddot{y} = 0$ nur in kartesischen Koordinaten so aussieht, in Polarkoordinaten gilt dann ja schon nicht mehr $m\ddot{r} = 0$ und $m\ddot{\varphi} = 0$, sondern die Gleichungen sind ein bischen anders, ist die Form von (30) eben immer diesselbe, unabhängig davon, welche spezielle Parametrisierung gewählt wurde.