week3: Die Euler-Lagrange Gleichungen der klassischen Mechanik
Kapitel 2.1: Herleitung mit Zwangskräften, 1 Teilchen

Wir betrachten ein kleines Kügelchen mit der Masse m, welches sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $F = mg$ auf einer zweidimensionalen Oberfläche bewegt. Man stelle sich etwa vor, dass sich das Kügelchen in einer grossen Schüssel bewegt, wobei die Schüssel vielleicht die Form einer grossen Halbkugel hat. Oder das Kügelchen bewegt sich in einem rotationssymmetrischen (bzg. der z-Achse) Trichter, den wir etwa folgendermassen parametrisieren können:

$$\vec{x}(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ f(r) \end{pmatrix}$$

mit $(r,\varphi) \in I$, mit Parameterbereich, etwa, $I = [0, r_{\max}) \times [0, 2\pi)$. Die Wahl

$$f(r) \;=\; c\,r$$

liefert etwa einen kegelförmigen Trichter mit Ruheposition des Kügelchens bei $\vec{x} = (0,0,0)$, und für die Wahl

$$f(r) \;=\; -\sqrt{R^2 - r^2}$$

erhalten wir eine Schüssel, eine grosse Halbkugel mit Radius R, mit Ruheposition des Kügelchens bei $\vec{x} = (0,0,-R)$.

Allgemein betrachten wir also die Bewegung eines Kügelchens der Masse m auf einer zweidimensionalen Fläche $\mathcal{F}$, für die wir etwa die Parametrisierung

$$\mathcal{F} \;=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} \;=\; \vec{x}(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix},\;\; (u,v) \in I \right\} \tag{1}$$

angeben können. Wir geben eine Anfangsposition und eine Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vor und wollen dann die Bewegung des Teilchens für beliebige $t > 0$ bestimmen.

Um die Zwangsbedingung $\vec{x} \in \mathcal{F}$ von vornherein zu berücksichtigen, machen wir den Lösungsansatz

$$\vec{x}_t \;=\; \vec{x}\big(u(t), v(t)\big) \;=\; \vec{x}(u_t, v_t)\,.$$

Wir können das $\vec{x}$ dann als eine Funktion von den zwei Variablen (u,v) auffassen, nämlich als Parametrisierung der Fläche $\mathcal{F}$, oder, wenn wir für u und v konkrete Funktionen der Zeit einsetzen, können wir das $\vec{x}_t$ auch nur als Funktion von einer Variablen, nämlich der Zeit t, auffassen. Es gilt dann offensichtlich

$$\dot{\vec{x}}_t \;=\; \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial u}\,\dot{u} \,+\, \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial v}\,\dot{v}$$

Das $\vec{x}_t$ muss die Newtonsche Bewegungsgleichung erfüllen,

$$m\ddot{\vec{x}} \;=\; \vec{F} \tag{2}$$

Die Kraft $\vec{F}$ ist zunächst mal gegeben durch die Schwerkraft

$$\vec{F}_{\text{schwer}} \;=\; -mg\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{3}$$

Das ist aber nicht die einzige Kraft, die auf das Kügelchen wirkt. Stellen Sie sich das Beispiel mit der Schüssel vor, und nehmen Sie an, dass sich das Kügelchen mit grosser Geschwindigkeit am oberen Rand der Schüssel auf horizontalen Kreisen bewegt. Auf das Kügelchen wirken dann Fliehkräfte, die von der Schüsselwand vollständig kompensiert werden müssen. Das heisst, das $\vec{F}$ in Gleichung (2) besteht aus zwei Komponenten:

$$\vec{F} \;=\; \vec{F}_{\text{schwer}} \,+\, \vec{Z} \tag{4}$$

wobei $\vec{Z}$ eine Zwangskraft ist, die sämtliche Kraftkomponenten, die senkrecht zur Fläche $\mathcal{F}$ wirken, exakt kompensieren muss. Dabei ist zu beachten, dass diese senkrechten Kraftkomponenten nicht nur von $\vec{F}_{\text{schwer}}$ herkommen, sondern von dem momentanen Bewegungszustand des Kügelchens abhängig sind, denken Sie an das Beispiel mit den Fliehkräften.

Was heisst das jetzt mathematisch? An jedem Punkt $\vec{x}(u,v)$ der Fläche $\mathcal{F}$ haben wir die Tangentialvektoren $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ sowie den Vekor

$$\vec{x}_\perp \;:=\; \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

der also durch das Vektorprodukt von $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ gegeben ist und der senkrecht auf $\mathcal{F}$ steht. Mit anderen Worten, an jedem Punkt $\vec{x}(u,v)$ der Fläche $\mathcal{F}$ können wir die Basis

$$\{\, \vec{x}_u\,,\, \vec{x}_v\,,\, \vec{x}_\perp \,\}$$

angeben und wir können Beschleunigungen und Kräfte nach dieser Basis entwickeln. Im allgemeinen ist diese Basis natürlich weder orthogonal noch orthonormal weswegen es nicht so einfach ist, dann die Entwicklungskoeffizienten zu berechnen. Aber es sind 3 linear unabhängige Vektoren, $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ sind tangential an $\mathcal{F}$ und $\vec{x}_\perp$ steht senkrecht auf $\mathcal{F}$. Wir nehmen dann die Newtonsche Bewegungsgleichung (2) mit der Zwangskraft $\vec{Z}$ aus (4),

$$m\ddot{\vec{x}} \;=\; \vec{F} \;=\; \vec{F}_{\text{schwer}} \,+\, \vec{Z} \tag{5}$$

und betrachten davon dann jeweils die $(u,v,\perp)$-Komponente. Die Entwicklungskoeffizienten der relevanten Grössen seien etwa

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{x}} &= a_u\,\vec{x}_u \,+\, a_v\,\vec{x}_v \,+\, a_\perp\,\vec{x}_\perp \\
\vec{F}_{\text{schwer}} &= F_u\,\vec{x}_u \,+\, F_v\,\vec{x}_v \,+\, F_\perp\,\vec{x}_\perp \\
\vec{Z} &= \lambda\,\vec{x}_\perp
\end{aligned}$$

Die Zwangskraft wirkt ja nur senkrecht zur Fläche. Dann bekommen wir also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m\,a_u &= F_u \\ m\,a_v &= F_v \\ m\,a_\perp &= F_\perp + \lambda \end{aligned} \tag{6}$$

Aus der letzten Gleichung von (6) können wir das λ und damit die Zwangskraft $\vec{Z}$ berechnen. Die ist jedoch meistens nicht von Interesse, typischerweise möchte man nur die Bewegung beschreiben. Die folgt dann, auch ohne das λ, aus den ersten beiden Gleichungen von (6), das sind zwei gewöhnliche DGLs zweiter Ordnung für die Funktionen $u(t)$ und $v(t)$. Der Punkt ist jetzt der, dass es eine sehr einfache Systematik gibt, mit der man die Bewegungsgleichungen für $u(t)$ und $v(t)$ herleiten kann.

Dazu nehmen wir an, dass die Kraft, die die Bewegung generiert, also hier die Schwerkraft, durch ein Potential gegeben ist:

$$\vec{F}_{\text{schwer}} = -\nabla V = -\left(\tfrac{\partial V}{\partial x_1}\,,\, \tfrac{\partial V}{\partial x_2}\,,\, \tfrac{\partial V}{\partial x_3} \right) \tag{7}$$

Die Schwerkraft (3) bekommen wir offensichtlich durch die Wahl

$$V(\vec{x}) = V(x_1, x_2, x_3) = mg\,x_3$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung (5) können wir dann also auch so schreiben:

$$m\ddot{\vec{x}} + \nabla V(\vec{x}) = \vec{Z} = \lambda\,\vec{x}_\perp \tag{8}$$

Die ersten beiden Gleichungen von (6), das sind dann die Gleichungen, aus denen wir die Bewegung des Kügelchens berechnen können, sind dann äquivalent zum System

$$\begin{aligned} \left\{ m\ddot{\vec{x}} + \nabla V(\vec{x}) \right\} \vec{x}_u &= 0 \\ \left\{ m\ddot{\vec{x}} + \nabla V(\vec{x}) \right\} \vec{x}_v &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichungen (9) bekommen wir offensichtlich, wenn wir die Gleichung (8) skalar mit $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ multiplizieren. Wir haben nun

$$\begin{aligned} \nabla V(\vec{x})\,\vec{x}_u &= \tfrac{\partial V}{\partial x_1}\tfrac{\partial x_1}{\partial u} + \tfrac{\partial V}{\partial x_2}\tfrac{\partial x_2}{\partial u} + \tfrac{\partial V}{\partial x_3}\tfrac{\partial x_3}{\partial u} = \tfrac{\partial V}{\partial u} \\ \nabla V(\vec{x})\,\vec{x}_v &= \tfrac{\partial V}{\partial x_1}\tfrac{\partial x_1}{\partial v} + \tfrac{\partial V}{\partial x_2}\tfrac{\partial x_2}{\partial v} + \tfrac{\partial V}{\partial x_3}\tfrac{\partial x_3}{\partial v} = \tfrac{\partial V}{\partial v} \end{aligned} \tag{10}$$

wobei wir auf der rechten Seite von (10) das V dann als Funktion der Variablen (u, v) auffassen. Ein Mathematiker würde hier vielleicht schreiben $W(u, v) := V\big(\vec{x}(u, v)\big)$ und dann ein $\frac{\partial W}{\partial u}$ auf der rechten Seite von (10), aber wir wollen uns hier an Physiker-Konventionen halten, die dann natürlich auch beinhalten, dass der Leser sich jeweils klarmachen muss, dass bei $\frac{\partial V}{\partial u}$ eben die Funktion $V\big(\vec{x}(u, v)\big)$ abzuleiten ist und bei $\frac{\partial V}{\partial x_3}$ muss die Funktion $V(x_1, x_2, x_3)$ abgeleitet werden.

Aus (9) und (10) bekommen wir dann also das System

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}}\,\vec{x}_u \;+\; \tfrac{\partial V}{\partial u} &= 0 \qquad (11) \\ m\ddot{\vec{x}}\,\vec{x}_v \;+\; \tfrac{\partial V}{\partial v} &= 0 \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt die Skalarprodukte

$$\ddot{\vec{x}}\,\vec{x}_u\,, \qquad \ddot{\vec{x}}\,\vec{x}_v$$

Wir haben

$$\dot{\vec{x}} \;=\; \vec{x}_u\,\dot{u} \;+\; \vec{x}_v\,\dot{v} \qquad (12)$$

$$\ddot{\vec{x}} \;=\; \vec{x}_{uu}\,\dot{u}^2 \;+\; 2\,\vec{x}_{uv}\,\dot{u}\dot{v} \;+\; \vec{x}_{vv}\,\dot{v}^2 \;+\; \vec{x}_u\,\ddot{u} \;+\; \vec{x}_v\,\ddot{v} \qquad (13)$$

wobei wir für den Moment die Abkürzung $\vec{x}_u := \partial\vec{x}/\partial u$ und analog für $\vec{x}_{uv}$ benutzen wollen. Die Notation $\vec{x}_t$ meint aber keine Zeitableitung, sondern steht nach wie vor für $\vec{x}_t = \vec{x}(t) = \vec{x}\big(u(t), v(t)\big) = \vec{x}(u_t, v_t)$. Betrachten wir einmal die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} \\ &\overset{(12)}{=} \tfrac{m}{2}\,\big\{\vec{x}_u^{\,2}\,\dot{u}^2 \;+\; 2\vec{x}_u\vec{x}_v\,\dot{u}\dot{v} \;+\; \vec{x}_v^{\,2}\,\dot{v}^2\big\} \qquad (14) \end{aligned}$$

Das $\vec{x}$ und damit auch $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ sind Funktionen von u und v oder von u_t und v_t. In Gleichung (14) treten auf der rechten Seite noch explizit die Grössen $\dot{u} = \dot{u}_t$ und $\dot{v} = \dot{v}_t$ auf. Wir wollen das T jetzt als Funktion der 4 Grössen $(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ auffassen, also

$$T \;=\; T(u_t, v_t, \dot{u}_t, \dot{v}_t) \;=\; \tfrac{m}{2}\Big\{\vec{x}_u(u_t,v_t)^2\,\dot{u}_t^2 \;+\; 2\vec{x}_u(u_t,v_t)\vec{x}_v(u_t,v_t)\,\dot{u}_t\dot{v}_t \;+\; \vec{x}_v(u_t,v_t)^2\,\dot{v}_t^2\Big\}$$

oder, wenn wir den Zeitindex t weglassen,

$$T \;=\; T(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \;=\; \tfrac{m}{2}\Big\{\vec{x}_u(u,v)^2\,\dot{u}^2 \;+\; 2\vec{x}_u(u,v)\vec{x}_v(u,v)\,\dot{u}\dot{v} \;+\; \vec{x}_v(u,v)^2\,\dot{v}^2\Big\} \qquad (15)$$

Dann gilt die folgende Aussage:

Theorem 2.1.1: Es sei $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ eine Parametrisierung von $\mathcal{F}$, $\vec{x}_t = \vec{x}(u_t, v_t)$ und die Funktion $T = T(u, v, \dot{u}, \dot{v})$ sei gegeben durch (15). Dann gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial T}{\partial \dot{u}} \;-\; \tfrac{\partial T}{\partial u} &= m\ddot{\vec{x}}\,\vec{x}_u \qquad (16) \\ \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial T}{\partial \dot{v}} \;-\; \tfrac{\partial T}{\partial v} &= m\ddot{\vec{x}}\,\vec{x}_v \end{aligned}$$

Beweis: Nach (14) ist

$$\tilde{T} \;:=\; T/m \;=\; \tfrac{1}{2}\,\big\{\vec{x}_u^{\,2}\,\dot{u}^2 \;+\; 2\vec{x}_u\vec{x}_v\,\dot{u}\dot{v} \;+\; \vec{x}_v^{\,2}\,\dot{v}^2\big\} \qquad (17)$$

Also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{u}} &= \vec{x}_u^2\,\dot{u} + \vec{x}_u\vec{x}_v\,\dot{v} \;=\; \vec{x}_u\,(\vec{x}_u\,\dot{u} + \vec{x}_v\,\dot{v}) \;=\; \vec{x}_u\,\dot{\vec{x}} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{u}} &= \tfrac{d}{dt}\vec{x}_u\,\dot{\vec{x}} + \vec{x}_u\,\ddot{\vec{x}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{T}}{\partial u} &= \vec{x}_{uu}\vec{x}_u\,\dot{u}^2 + (\vec{x}_{uu}\vec{x}_v + \vec{x}_u\vec{x}_{uv})\,\dot{u}\dot{v} + \vec{x}_v\vec{x}_{uv}\,\dot{v}^2 \\
&= (\vec{x}_{uu}\dot{u} + \vec{x}_{uv}\dot{v})\,(\vec{x}_u\dot{u} + \vec{x}_v\dot{v}) \\
&= \tfrac{d}{dt}\vec{x}_u\,\dot{\vec{x}}
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{u}} - \frac{\partial\tilde{T}}{\partial u} \;=\; \tfrac{d}{dt}\vec{x}_u\,\dot{\vec{x}} + \vec{x}_u\,\ddot{\vec{x}} - \tfrac{d}{dt}\vec{x}_u\,\dot{\vec{x}} \;=\; \vec{x}_u\,\ddot{\vec{x}}$$

Die Gleichung mit den v-Ableitungen folgt analog. ■

Wir können dann also das System (11) schreiben als

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial u} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{v}} - \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial v} &= 0
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{u}} - \frac{\partial(T-V)}{\partial u} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{v}} - \frac{\partial(T-V)}{\partial v} &= 0
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung das V nur von $\vec{x}$ aber nicht von $\dot{\vec{x}}$ abhängt, ist $\frac{\partial V}{\partial\dot{u}} = 0 = \frac{\partial V}{\partial\dot{v}}$ und wir können schliesslich schreiben

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{u}} - \frac{\partial(T-V)}{\partial u} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{v}} - \frac{\partial(T-V)}{\partial v} &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Wir fassen unsere Ergebnisse in dem folgenden Theorem zusammen.

Theorem 2.1.2: Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter dem Einfluss eines Potentials $V(\vec{x})$ im $\mathbb{R}^3$. Durch das Potential werde die Kraft

$$\vec{F} \;=\; -\nabla V(\vec{x})$$

auf das Teilchen ausgeübt. Weiterhin unterliege das Teilchen mechanischen Beschränkungen, die dazu führen, dass die Bewegung des Teilchens nur in einer Fläche

$$\mathcal{F} \;=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} \;=\; \vec{x}(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix},\;\; (u,v) \in I \right\}$$

stattfinden kann. Dann gilt:

a) Die Bahnkurve $\vec{x}_t = \vec{x}(u_t, v_t)$ genügt der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} \;+\; \nabla V(\vec{x}) \;\;=\;\; \lambda\,\vec{x}_\perp$$

mit $\vec{x}_\perp = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$. Dabei ist $\lambda = \lambda(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$ eine Funktion, mit deren Hilfe die durch die mechanischen Beschränkungen hervorgerufene Zwangskraft $\vec{Z} = \lambda\,\vec{x}_\perp$ berechnet werden kann. Die Zwangskraft $\vec{Z}$ ist eine reale Kraft, nicht nur ein mathematisches Hilfsmittel.

b) Definieren wir die Lagrange-Funktion L durch

$$L \;:=\; T - V \;=\; \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \;-\; V(\vec{x}) \tag{19}$$

dann kann die Bahnkurve $\vec{x}_t = \vec{x}(u_t, v_t)$ des Teilchens aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial u} \;&=\; 0 \\ \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{v}} \;-\; \tfrac{\partial L}{\partial v} \;&=\; 0 \end{aligned} \tag{20}$$

gewonnen werden.

Bemerkungen:

1) Zum Aufstellen und Lösen der Euler-Lagrange-Gleichungen (20), also zum Berechnen der Bahnkurve, ist die Kenntnis der Zwangskraft $\vec{Z} = \lambda\,\vec{x}_\perp$ nicht erforderlich. Der relevante Teil von dem Theorem ist also typischerweise der Teil (b), der Teil (a) ist 'nur zur Info', nur zum besseren Verständnis sozusagen.

2) Die Parameter (u, v) (oder jede Auswahl von solchen Parametern), die die Zwangsbedingung

$$\vec{x} \;=\; \vec{x}(u, v) \;\;\in\;\; \mathcal{F}$$

sicherstellen, heissen verallgemeinerte Koordinaten für das gegebene mechanische Problem. Typischerweise werden sie in den Physik-Büchern mit $q_1, q_2, \cdots, q_f$ bezeichnet, mit f = Anzahl der Freiheitsgrade (also hier $f = 2$).