8. Übungsblatt zur Vorlesung Ökonometrie

Aufgabe 1: Wir betrachten noch einmal das Setting von Aufgabe 1 vom Übungsblatt 6: Zufallszahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ heissen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\mathsf{Prob}\big[\, x_i \in [x, x+dx) \,\big] \;=\; \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\mathsf{Prob}[\, x_i \in [x, x+dx) \,] \;=\; 0$ falls $x < 0$. In Teil (c) hatten wir gezeigt, dass der Maximum Likelihood Schätzer für das λ durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \;=\; \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

gegeben ist, und in Teil (e) hatten wir den Erwartungswert berechnet,

$$\mathsf{E}\big[\, \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \,\big] \;=\; \frac{n}{n-1}\, \lambda \tag{1}$$

a) Zeigen Sie jetzt, dass die Varianz des Maximum Likelihood Schätzers gegeben ist durch

$$\mathsf{V}\big[\, \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \,\big] \;=\; \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\, \lambda^2 \tag{2}$$

Benutzen Sie dazu wieder die Formel aus Teil (1f) vom Übungsblatt 6. Insbesondere gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{V}\big[\, \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) \,\big] \;=\; 0$$

Je mehr Daten wir haben, desto genauer werden die Schätzungen.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate vom Übungsblatt 6, dass die Verteilung von $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n)$ gegeben ist durch

$$\mathsf{Prob}\big[\, \hat{\lambda}_{\mathrm{ML}} \in [x, x+dx) \,\big] \;=:\; p_{\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}}(x)\, dx$$

mit der Dichte

$$p_{\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}}(x) \;=\; \frac{1}{(n-1)!}\, \frac{(n\lambda)^n}{x^{n+1}}\, e^{-\frac{n\lambda}{x}} \tag{3}$$

Diese Formel werden wir in der nächsten Aufgabe mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen.

..bitte wenden

Aufgabe 2: Wir wollen die Formeln (1), (2) und (3) aus Aufgabe 1 mit einer geeigneten R-Simulation überprüfen. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Legen Sie die Variablen $N = 10000$ und $n = 10$ in R an. N ist die Anzahl der Zufallsexperimente, die wir durchführen werden, und $n = 10$ ist die Anzahl der exponential-verteilten Zufallszahlen, die wir pro Zufallsexperiment ziehen wollen. Weil wir das n so klein wählen (auf Üblatt 6 hatten wir $n = 1000$) ist es jetzt wesentlich, ob man etwa durch n oder durch $n-1$ teilt.

b) Legen Sie den Vektor `lambdaML` der Länge N an und initialisieren Sie ihn etwa mit Einträgen 0. Programmieren Sie dann einen Loop von 1 bis N, der bei jedem Durchlauf n mit Parameter $\lambda = 4$ exponential-verteilte Zufallszahlen erzeugt, daraus das $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n)$ berechnet und das Resultat dann in dem Vektor `lambdaML` speichert.

c) Berechnen Sie den Mittelwert und die Varianz von `lambdaML` und vergleichen Sie die Werte mit den theoretischen Resultaten (1) und (2).

d) Codieren Sie eine benutzerdefinierte Funktion `dlambdaML = function(x,n,lambda)`, die durch die rechte Seite von (3) gegeben ist ("d" steht dabei für "density" von $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$). Erzeugen Sie dann ein Histogramm des Vektors `lambdaML`, wobei Sie den optionalen Parameter `prob = TRUE` setzen, und fügen Sie einen plot von `dlambdaML`, etwa in rot, Ihrem Histogramm zu. Der function-plot und das Histogramm sollten dann also in etwa übereinstimmen.