Lösungen zum 4. Übungsblatt Ökonometrie

Aufgabe 1: a) Die allgemeine Formel für das P_X lautet:

$$P_X = X(X^T X)^{-1} X^T$$

Nun ist

$$X^T X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1\vec{x}_1 & \vec{x}_1\vec{x}_2 \\ \vec{x}_2\vec{x}_1 & \vec{x}_2\vec{x}_2 \end{pmatrix}$$

mit den Skalarprodukten

$$\begin{aligned} \vec{x}_1\vec{x}_1 &= 2 \\ \vec{x}_1\vec{x}_2 &= 0 \\ \vec{x}_2\vec{x}_2 &= 3 \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} X^T X &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ (X^T X)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} (X^T X)^{-1} X^T &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 2/6 \\ 1/6 & 5/6 & -2/6 \\ 2/6 & -2/6 & 2/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Wir bekommen

$$\begin{aligned} P_X^2 &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix}30 & 6 & 12\\ 6 & 30 & -12\\ 12 & -12 & 12\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix} = P_X\end{aligned}$$

und $P_X^T = P_X$ ist offensichtlich.

c) Wir bekommen

$$P_X\vec{x}_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\\ 6\\ 0\end{pmatrix} = \vec{x}_1$$

und

$$P_X\vec{x}_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6\\ -6\\ 6\end{pmatrix} = \vec{x}_2$$

d) Wir erhalten

$$P_X\vec{y} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \vec{y}_{\min}$$

e) Die allgemeine Formel ist

$$\vec{\beta} = (X^TX)^{-1}X^T\vec{y}$$

In unserem Fall liefert das, das $(X^TX)^{-1}X^T$ haben wir oben schon berechnet,

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

f) Mit dem P_X von oben bekommen wir

$$\begin{aligned} P_X^{\perp} &= Id - P_X = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5/6 & 1/6 & 2/6\\ 1/6 & 5/6 & -2/6\\ 2/6 & -2/6 & 2/6\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1/6 & -1/6 & -2/6\\ -1/6 & 1/6 & 2/6\\ -2/6 & 2/6 & 4/6\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und damit

$$\vec{y}^{\perp} \;=\; \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

g) Schliesslich,

$$\vec{y}_{\min} + \vec{y}^{\perp} \;=\; \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \vec{y}$$

und

$$\vec{y}_{\min} \cdot \vec{y}^{\perp} \;=\; \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \;=\; 5 - 1 - 4 \;=\; 0 \;.$$