

Lösungen Übungsblatt 10 Ökonometrie

Aufgabe 1: Beweisen Sie die Behauptung 3 aus dem Beweis zu Theorem 10.2, das war die folgende Aussage (wir ersetzen das $n - (p + 1)$ durch ein m): Für beliebige reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \geq \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right)^2.$$

Lösung: Mit Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung, die lautet: Für beliebige Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, \dots, a_n) \\ \vec{b} &= (b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

gilt

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

oder in Koordinaten und quadriert:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right)$$

Jetzt wählen wir

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (1, \dots, 1) \\ \vec{b} &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

und bekommen

$$\left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot \lambda_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \right)$$

oder

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \leq n \sum_{j=1}^n \lambda_j^2$$

Das ist äquivalent zur Aussage von Aufgabe 1,

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \quad \blacksquare$$

Aufgabe 2: a) Wegen

$$\mathbb{E}[\phi_i \phi_j] = \delta_{i,j}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q(\phi)] &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \mathbb{E}[\phi_i \phi_j] \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Tr}(A)\end{aligned}$$

b) Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Es sei

$$\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \}$$

eine ONB aus Eigenvektoren von A , also

$$\begin{aligned}A\vec{v}_i &= \lambda_i \vec{v}_i \\ \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle &= \delta_{i,j}\end{aligned}$$

und

$$A = V D V^T$$

mit

$$V = \left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ & \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n & \\ & & & & \end{array} \right)$$

und

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}Q(\phi) &= \langle \phi, A\phi \rangle \\ &= \langle \phi, V D V^T \phi \rangle \\ &= \langle V^T \phi, D V^T \phi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{v}_i \cdot \phi)^2\end{aligned}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned}\text{V}[Q] &= \mathbb{E}[Q^2] - (\mathbb{E}[Q])^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[(\vec{v}_i \cdot \phi)^2 (\vec{v}_j \cdot \phi)^2] - [\text{Tr}(A)]^2\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir den Hilfssatz 9.2 an. Die Aussage von Teil (b) war: Es gilt die folgende Formel

$$\mathbb{E}[(\vec{v}_i \cdot \vec{\varepsilon})^2 (\vec{v}_j \cdot \vec{\varepsilon})^2] = \begin{cases} 3\sigma^4 & \text{falls } i = j \\ \sigma^4 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

In unserem Fall sind die ε_i die ϕ_i , ebenfalls normalverteilte Zufallszahlen, aber hier mit Standardabweichung $\sigma = 1$. Also,

$$\mathbb{E}[(\vec{v}_i \cdot \phi)^2 (\vec{v}_j \cdot \phi)^2] = \begin{cases} 3 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[Q] &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[(\vec{v}_i \cdot \phi)^2 (\vec{v}_j \cdot \phi)^2] - [\text{Tr}(A)]^2 \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[(\vec{v}_i \cdot \phi)^2 (\vec{v}_j \cdot \phi)^2] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[(\vec{v}_i \cdot \phi)^2 (\vec{v}_j \cdot \phi)^2] - [\text{Tr}(A)]^2 \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 3 - [\text{Tr}(A)]^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 2 - [\text{Tr}(A)]^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 2 - [\text{Tr}(A)]^2 \\ &= [\text{Tr}(A)]^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 2 - [\text{Tr}(A)]^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2 \text{Tr}(A^2) \end{aligned}$$

c) Für nicht-symmetrisches A muss die Aussage nicht gelten, denn: Sei etwa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$Q(\phi) = \langle \phi, A\phi \rangle = \phi_1 \phi_2$$

und wir bekommen

$$\mathbb{E}[Q] = \mathbb{E}[\phi_1 \phi_2] = 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[Q] &= \mathbb{E}[\phi_1^2 \phi_2^2] - (\mathbb{E}[\phi_1 \phi_2])^2 \\ &= \mathbb{E}[\phi_1^2] \mathbb{E}[\phi_2^2] - 0 = 1 \end{aligned}$$

Allerdings ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $\text{Tr}(A^2) = 0$. Um in einem solchen Fall die Varianz berechnen zu können, kann man ganz einfach das A vorher symmetrisieren,

$$Q(\phi) = \langle \phi, A\phi \rangle = \langle A^T \phi, \phi \rangle = \langle \phi, A^T \phi \rangle$$

und damit

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= \langle \phi, A\phi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \langle \phi, A\phi \rangle + \langle \phi, A^T \phi \rangle \right\} \\ &= \left\langle \phi, \frac{A+A^T}{2} \phi \right\rangle \end{aligned}$$

Mit der Formel aus Teil (b) folgt dann also

$$V[Q] = 2 \text{Tr} \left[\left(\frac{A+A^T}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} [(A + A^T)^2] .$$