Hochschule RheinMain WS 2021/22
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 1. Übungsblatt Ökonometrie

Aufgabe 1: Die Regressionskoeffizienten $\vec\beta = (\beta_0, \beta_1)$ bekommen wir als Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec\beta \;=\; \vec b$$

mit

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \vec e\,\vec e & \vec e\,\vec x \\ \vec e\,\vec x & \vec x\,\vec x \end{pmatrix}, \qquad \vec\beta \;=\; \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \qquad \vec b \;=\; \begin{pmatrix} \vec e\,\vec y \\ \vec x\,\vec y \end{pmatrix}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \vec x &= (-6, -4, -2, 0, +2, +4, +6) \\ \vec e &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

und

$$\vec y \;=\; (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Damit erhalten wir die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \vec e\,\vec e &= 7 \\ \vec e\,\vec x &= 0 \\ \vec x\,\vec x &= 2(4 + 16 + 36) \;=\; 112 \\ \vec x\,\vec y &= 0 - 4 - 4 + 0 + 8 + 20 + 36 \;=\; 56 \\ \vec e\,\vec y &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \;=\; 21 \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 112 \end{pmatrix} \\ \vec b &= \begin{pmatrix} 21 \\ 56 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \;=\; A^{-1}\vec b \;=\; \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/112 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 56 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2: a) Das β_0 ist gegeben durch das Minimum der Funktion

$$F(\beta_0) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0]^2$$

Notwendige Bedingung ist

$$\frac{dF}{d\beta_0} \quad = \quad -2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_0] \quad \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$\begin{aligned} n\beta_0 \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n}\beta_0 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \Leftrightarrow \qquad \beta_0 \quad &= \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad =: \quad \bar{y} \end{aligned}$$

In unserem Fall ist $y_i = ax_i + b$, also

$$\beta_0 \quad = \quad \bar{y} \quad = \quad a\,\bar{x} \; + \; b \; .$$

b) Das β_1 ist gegeben durch das Minimum der Funktion

$$F(\beta_1) \quad := \quad \sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_1 x_i]^2$$

Notwendige Bedingung ist

$$\frac{dF}{d\beta_1} \quad = \quad -2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - \beta_1 x_i] \quad \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_1 x_i^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(ax_i + b) \quad = \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; + \; b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Also,

$$\beta_1 \quad = \quad a \; + \; b\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad = \quad a \; + \; b\,\frac{\bar{x}}{\overline{x^2}}$$

wenn wir etwa die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \bar{x} \quad &:= \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \overline{x^2} \quad &:= \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

benutzen.

c) Nach den Formeln aus der Vorlesung sind die Regressionskoeffizienten $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1)$ durch die Lösung des Gleichungssystems

$$A\vec{\beta} \quad = \quad \vec{b}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \vec{e}\,\vec{e} & \vec{e}\,\vec{x} \\ \vec{e}\,\vec{x} & \vec{x}\,\vec{x} \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}\,\vec{y} \\ \vec{x}\,\vec{y} \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir haben nun

$$y_i = a\,x_i + b$$

oder in Vektor-Schreibweise

$$\vec{y} = a\,\vec{x} + b\,\vec{e}$$

mit dem Vektor $\vec{e} = (1, 1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Damit bekommen wir die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \vec{e}\,\vec{y} &= a\,\vec{e}\,\vec{x} + b\,\vec{e}\,\vec{e} \\ \vec{x}\,\vec{y} &= a\,\vec{x}\,\vec{x} + b\,\vec{x}\,\vec{e} \end{aligned}$$

Also,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}\,\vec{y} \\ \vec{x}\,\vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\vec{e}\,\vec{x} + b\,\vec{e}\,\vec{e} \\ a\,\vec{x}\,\vec{x} + b\,\vec{x}\,\vec{e} \end{pmatrix}$$

Das können wir auch so schreiben:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{e}\,\vec{e} & \vec{e}\,\vec{x} \\ \vec{e}\,\vec{x} & \vec{x}\,\vec{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Also ist das Gleichungssystem

$$A\,\vec{\beta} = \vec{b}$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \vec{e}\,\vec{e} & \vec{e}\,\vec{x} \\ \vec{e}\,\vec{x} & \vec{x}\,\vec{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}\,\vec{e} & \vec{e}\,\vec{x} \\ \vec{e}\,\vec{x} & \vec{x}\,\vec{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} .$$