

## 9. Übungsblatt zur Vorlesung Datenanalyse mit R

**Aufgabe 1:** Das ARCH(1)-Modell war definiert durch den stochastischen Preisprozess

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \times \{ 1 + \text{vol}(t_{k-1}) \phi_k \} \quad (1)$$

mit der Volatilitäts-Spezifikation

$$\text{vol}^2(t_{k-1}) = w_0 \times \text{bsvol}^2 + (1 - w_0) \times \text{ret}^2(t_{k-1})$$

Dabei sind die Returns wie üblich definiert durch

$$\text{ret}(t_k) := \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}$$

und die  $\phi_k$  in Gleichung (1) sind unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Laden Sie sich die `SPX.txt` Zeitreihe und die Daten für die General Electric Aktie `GE.txt` von der VL-homepage herunter und kalibrieren Sie dann ein ARCH(1)-Modell an diese Daten. Das heisst, bestimmen Sie diejenigen Parameter

$$(\text{bsvol}, w_0)$$

die am besten, im Sinne der Maximum-Likelihood Methode, zu den jeweiligen Zeitreihendaten passen. Benutzen Sie dazu den Code aus dem `week9.txt`, Sie brauchen hier keine neuen Funktionen zu schreiben. Bestimmen Sie die Stelle des Maximums der Log-Likelihood-Funktion `logL` graphisch, indem Sie sich die Höhenlinien von `logL` in der  $(\text{bsvol}, w_0)$ -Ebene anschauen, also genau so, wie das auch im `week9.txt` gemacht wurde. Vergleichen Sie den Wert für `bsvol` wieder mit der Standardabweichung der Returns.

**Aufgabe 2:** Die Kurtosis  $\kappa = \kappa(\vec{x})$  eines Datenvektors  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ist definiert durch

$$\kappa(\vec{x}) := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}^2} \quad (2)$$

mit  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  und dient als Maß für ‘heavy tails’. Entsprechend ist die Kurtosis einer Zufallsvariablen  $X$  definiert durch

$$\kappa(X) := \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^4]}{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]^2} \quad (3)$$

Für normalverteilte Zufallszahlen findet man den exakten analytischen Wert von  $\kappa = 3$ .

- a) Starten Sie eine R-Session und codieren Sie eine Funktion `Kurtosis(x)`, die zu gegebenen Datenvektor  $\vec{x}$  die Zahl  $\kappa(\vec{x})$  aus (2) zurückgibt. Erzeugen Sie dann  $n = 10000$  mit Mittelwert  $\mu = 15$  und Standardabweichung  $\sigma = 2$  normalverteilte Zufallszahlen und berechnen Sie die Kurtosis von diesen Zufallszahlen mit ihrer Funktion `Kurtosis(x)`, da sollte dann also in etwa eine 3 rauskommen.
- b) Berechnen Sie die Kurtosis der Returns der Zeitreihen `DAX.txt`, `SPX.txt` und `GE.txt` von der VL-homepage.
- c) Die SPX-Zeitreihe enthält genau einen Return, der betragsmässig grösser als 20% ist. Entfernen Sie diesen Return aus der SPX-Zeitreihe (oder überschreiben Sie ihn durch eine 0), und berechnen Sie dann die Kurtosis erneut.