Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2021/22

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Datenanalyse und Scientific Computing mit R

1.Aufgabe: Gegeben sei die Funktion von 2 Variablen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \;:=\; \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a) Legen Sie die Funktion f in R als benutzerdefinierte Funktion an, so dass sie also mit dem Aufruf `f(x,y)` in R benutzt werden kann.

b) Erstellen Sie einen 3D-Plot dieser Funktion auf dem Bereich $(x,y) \in [-20,20] \times [-20,20]$. Benutzen Sie dazu etwa die `persp()`-Funktion oder die `persp3D()`-Funktion aus dem plot3D-package. Dieses Paket müssen Sie gegebenenfalls zunächst auf Ihrem Computer installieren. Finden Sie heraus, wie das funktioniert.

c) Benutzen Sie dann die `contour()`-Funktion, um die Höhenlinien dieser Funktion auf dem Bereich $[-20,20] \times [-20,20]$ darzustellen.

2.Aufgabe: In den `week6.txt` und `week7.txt` hatten wir durch eine Datenanalyse das folgende stochastische Modell für Preisprozesse von liquide handelbaren Assets motiviert (hier jetzt mit einem Driftparameter $\mu \neq 0$):

$$S(t_k) \;=\; S(t_{k-1})\left(1 \;+\; \mu\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\right) \tag{1}$$

wobei $S(t_k)$ der Assetpreis zum Zeitpunkt $t_k = k\Delta t$ ist, $k = 1,2,...,N$. Dabei waren die ϕ_k gegeben durch standard-normalverteilte Zufallszahlen,

$$(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N) \;=\; \texttt{rnorm(N,0,1)} \;=\; \texttt{rnorm(N)} \tag{2}$$

Das Modell (1) heisst das zeitdiskrete Black-Scholes Modell. In dieser Aufgabe soll durch Simulation gezeigt werden, dass im Limes $\Delta t \to 0$ eine explizite Lösung von (1) angegeben werden kann, nämlich

$$S(t_k) \;=\; S_0\, e^{\sigma\, x_{t_k} \,+\, (\mu - \sigma^2/2)\, t_k} \tag{3}$$

mit $S_0 = S(t_0) = S(0)$. Dabei heisst die Kombination von Zufallszahlen

$$x_{t_k} \;:=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{4}$$

eine Brownsche Bewegung (mit der Definition $x_0 := 0$) und die Zufallszahlen ϕ_j in (4) müssen genau dieselben sein, die auch in den Gleichungen (1,2) benutzt worden sind. Der Prozess (3) wird dann auch als geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet.

Schreiben Sie dazu eine Funktion

```
CompareBSPaths( mu, sigma, T, N, S0=100 )
```

die

(i) den Vektor $S1 = (S1_{t_1}, S1_{t_2}, ..., S1_{t_N})$ generiert, indem die Gleichung (1) mit $S1_{t_0} = S_0$ N-mal iteriert wird, und

(ii) den Vektor $S2 = (S2_{t_1}, S2_{t_2}, ..., S2_{t_N})$ direkt mit Hilfe der Formel (3) generiert.

Die beiden Preispfade $S1$ und $S2$ sollen dann in einem Plot miteinander verglichen werden.