

12. Übungsblatt zur Vorlesung Datenanalyse mit R

Aufgabe 1: Es ist eine Tatsache, dass in Aktienmärkten das Preisniveau und das Volatilitätsniveau negativ korreliert sind: Geht der Markt runter, geht die Volatilität typischerweise nach oben, und geht der Markt hoch, nimmt die Volatilität eher ab. In einem ARCH(1)-Modell

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \times [1 + \text{vol}(t_{k-1})\phi_k] \quad (1)$$

mit Vol-Spezifikation ($w_0 + w_1 = 1$, $w_0, w_1 \geq 0$)

$$\text{vol}^2(t_k) = w_0 \text{bsvol}^2 + w_1 \text{ret}^2(t_k) \quad \text{für } k \geq 1 \quad (2)$$

kann man das auf einfache Art und Weise dadurch mit berücksichtigen, dass man etwa die Vol-Spezifikation (2) abändert zu ($w_1 = 1 - w_0$)

$$\text{vol}^2(t_k) := \begin{cases} w_0 \text{bsvol}^2 + (w_1 - \alpha)_+ \text{ret}^2(t_k) & \text{falls } \text{ret}(t_k) \geq 0 \\ w_0 \text{bsvol}^2 + (w_1 + \alpha)_+ \text{ret}^2(t_k) & \text{falls } \text{ret}(t_k) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

wobei der Koeffizient vor dem $\text{ret}^2(t_k)$ immer positiv sein sollte, d.h. wir definieren

$$(w_1 \pm \alpha)_+ := \max\{w_1 \pm \alpha, 0\} \quad (4)$$

und betrachten etwa $\alpha \in (-1, 1)$. Dabei entspricht ein positives α dann einer negativen Korrelation von Preisniveau und Volatilitätsniveau. Implementieren Sie jetzt die log-Likelihood-Funktion für das Modell (1) mit Vol-Spezifikation (3) und zeigen Sie am Beispiel der DAX-Zeitreihe, dass das Maximum in der Tat für ein $\alpha > 0$ angenommen wird. Bestimmen Sie also die Parameter $(\text{bsvol}^{\max}, w_0^{\max}, \alpha^{\max})$, die die Likelihood-Funktion maximieren tun.